PROGRAM ROZWOJOWY POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

PRZETWARZANIE SYGNAŁÓW

SEMESTR V

Człowiek- najlepsza inwestycja

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

PROGRAM ROZWOJOWY POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

PRZETWARZANIE SYGNAŁÓW

Opiekun przedmiotu
prof. dr hab. inż. Krzysztof Kałużyński

Wykład
prof. dr hab. inż. Krzysztof Kałużyński (współautor dr inż. Krzysztof Mikołajczyk)

laboratorium
dr inż. Beata Leśniak-Plewińska (kierownik), dr inż. Szymon Cygan, dr inż. Jakub Żmigrodzki, mgr inż. Iryna Gorbenko

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Uzyskiwane kompetencje

Znajomość podstawowych pojęć i metod opisu sygnałów ciągłych i dyskretnych jedno- i dwuwymiarowych, znajomość podstaw przetwarzania sygnałów i obrazów.

Umiejętność przetwarzania sygnałów z wykorzystaniem poznanych metod i narzędzi.

PROGRAM ROZWOJOWY
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

Zaliczenie przedmiotu

Egzamin - 70% oceny końcowej.

Wymagane uzyskanie min. 50% pkt. z części egzaminu dotyczącej przekształcenia Fouriera i analizy widmowej

Laboratorium - 30% oceny końcowej.

Wymagane uzyskanie min. 50% pkt. zarówno z egzaminu jak i z laboratorium

Liczba egzaminów – 2 w sesji zimowej, 1 w sesji poprawkowej

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

PROGRAM ROZWOJOWY
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

Informacja od dr inż. Beaty Leśniak-Plewińskiej (kierownik laboratorium)

laboratoria ruszają od 23.11;

dalsze informacje przez USOS lub na stronie ZIB:

zib.mchtr.pw.edu.pl

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

PROGRAM ROZWOJOWY
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

LITERATURA

1. T.P. Zieliński Cyfrowe przetwarzanie sygnałów, WKiŁ 2005
2. R.G.Lyons Wprowadzenie do cyfrowego przetwarzania sygnałów, WKiŁ 2006
3. W.Malina, M.Smiatacz Metody cyfrowego przetwarzania obrazów, Exit 2005
4. R.Tadeusiewicz, P.Korohoda Komputerowa analiza i przetwarzanie obrazów, Kraków Wydawnictwo Fundacji Postępu Telekomunikacji 1997

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

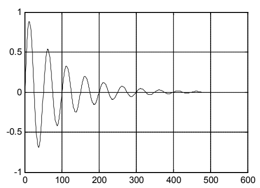
Wykład I

Wprowadzenie

Podstawy teoretyczne przetwarzania sygnałów

Sygnały

Sygnał – funkcja czasu (najczęściej) przedstawiająca przebieg parametru pewnego zjawiska, wielkości fizycznej



Przykład sygnału – zarejestrowany stan przejściowy po udarze

PROGRAM ROZWOJOWY POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

Zastosowania przetwarzania sygnałów I

Telekomunikacja – usuwanie echa, kompresja, filtracja, multipleksowanie, wideokonferencje itd.

Technika militarna – echolokacja, radiolokacja, naprowadzanie pocisków, bezpieczeństwo informacji itd.

Przemysł – sterowanie, badania nieniszczące, analiza drgań, mikrogeometria powierzchni itd.

Technika samochodowa – inteligentne zawieszenia, elektroniczne sterowanie i systemy hamowania, autonomiczny pojazd, systemy nawigacyjne, kontrola ciśnienia w oponach, sterowanie działaniem poduszek, multimedia – obecnie około 50% wartości samochodu stanowi elektronika, głównie związana z przetwarzaniem sygnałów.

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

PROGRAM ROZWOJOWY POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

Zastosowania przetwarzania sygnałów II

Identyfikacja obiektów (osób)

Analiza danych rynkowych i giełdowych

AGD – „inteligentne” pralki i lodówki

Rozrywka/multimedia – kodowanie i kompresja obrazów i sygnałów, efekty specjalne

Biologia, ekologia – analiza zmian populacji zwierząt, analiza aktywności organizmów

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

PROGRAM ROZWOJOWY
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

Zastosowania przetwarzania sygnałów III

Rozpoznawanie i generacja mowy

Geologia – poszukiwanie złóż surowców, prognozowanie trzęsień ziemi (i innych zjawisk)

Badania kosmiczne – kompresja danych, analiza zdjęć pochodzących z kosmosu, analiza sygnałów pochodzących z różnych czujników umieszczonych w przestrzeni

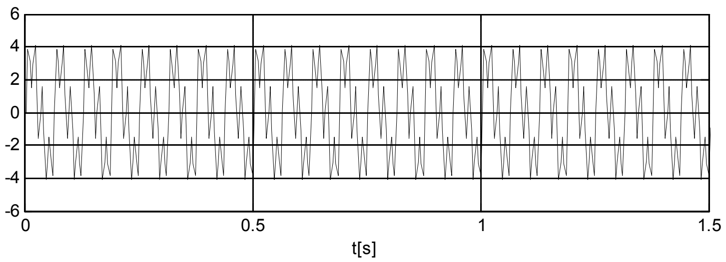
Medycyna – obrazowanie, przetwarzanie i analiza sygnałów biomedycznych, wspomaganie słuchu, inteligentne protezy kończyn, urządzenia do wspomagania funkcji narządów, kompresja danych.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

PROGRAM ROZWOJOWY
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

Sygnał I - przebieg czasowy

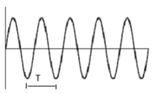


Jakie są składowe sygnału??

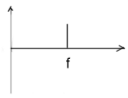
KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Dziedzina czasu – dziedzina częstotliwości



$$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega}$$

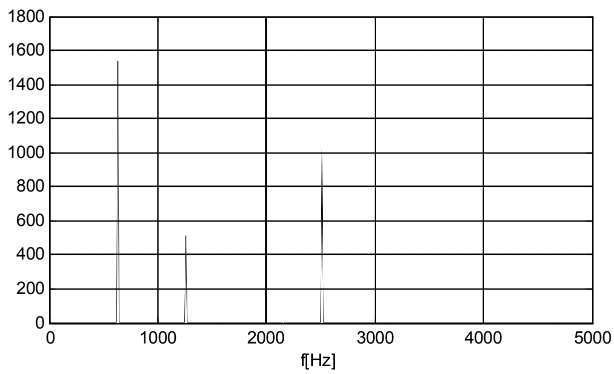


Sygnał okresowy   związek okres-częstotliwość   widmo sygnału

T – okres, f – częstotliwość, ω – pulsacja (częstotliwość kołowa)

PROGRAM ROZWOJOWY
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

Sygnał I - wynik analizy widmowej



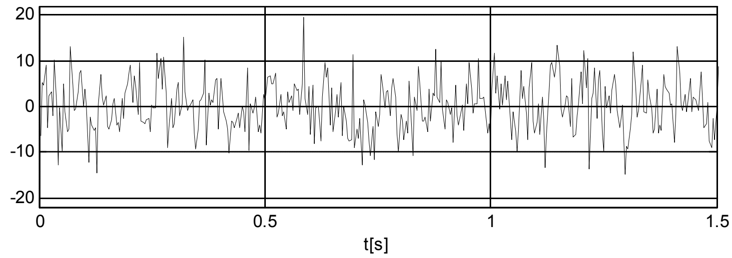
Sygnał zawiera 3 składowe o różnych amplitudach i częstotliwościach

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

PROGRAM ROZWOJOWY POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

Sygnał II - przebieg czasowy



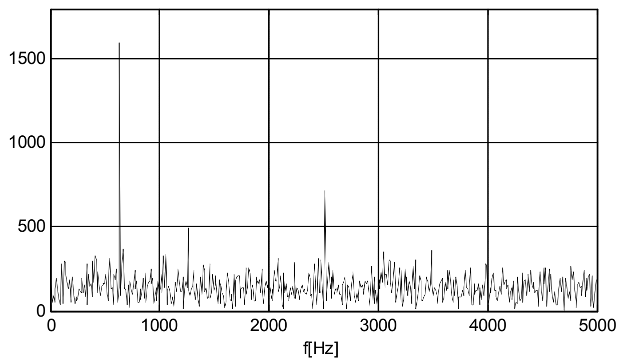
Jakie są składowe sygnału??

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

PROGRAM ROZWOJOWY POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

Sygnał II - wynik analizy widmowej



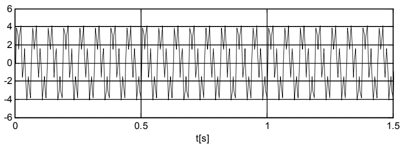
Sygnał zawiera 3 składowe o różnych amplitudach i częstotliwościach oraz szum

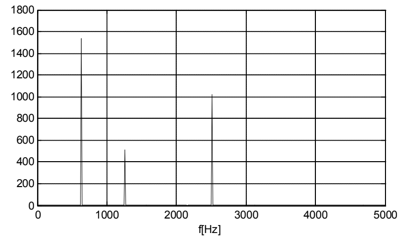
KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

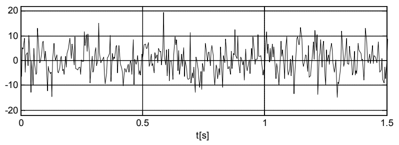
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

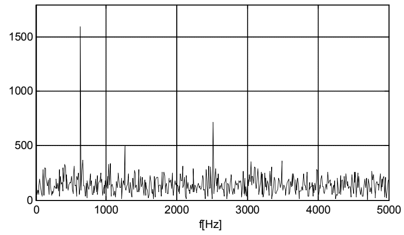
PROGRAM ROZWOJOWY
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

Porównanie przedstawienia sygnału I i II w dziedzinie czasu i częstotliwości



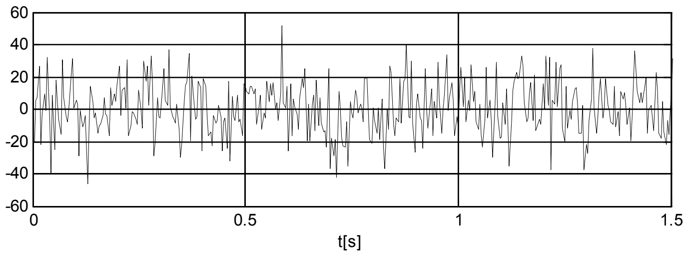


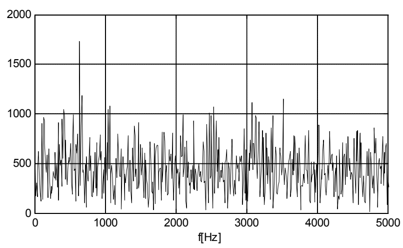




PROGRAM ROZWOJOWY
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

Sygnał III - przebieg czasowy i wynik analizy widmowej

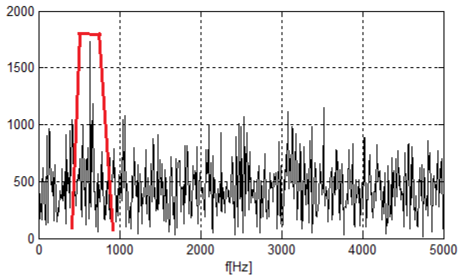




Sygnał zawiera 1 składową sinusoidalną oraz szum o dużej amplitudzie w stosunku do amplitudy składowej sinusoidalnej.

TRUDNA INTERPRETACJA !!

Sygnał III - wynik analizy widmowej



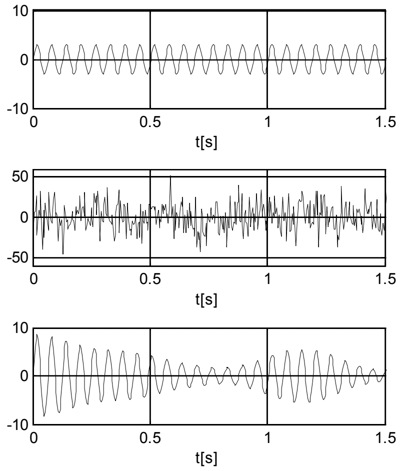
Sygnał zawiera 1 składową sinusoidalną oraz szum o dużej amplitudzie w stosunku do amplitudy składowej sinusoidalnej.

TRUDNA INTERPRETACJA !!

Powyżej zaproponowano ograniczenie zakresu częstoliwości wypadkowego sygnału, tak, aby zachować interesującą nas składową sinusoidalną. Ograniczenia takie realizowane jest przy pomocy filtracji (układ elektroniczny, algorytm - filtracja cyfrowa).

Czerwony trapez ogranicza zbiór składowych częstotliwościowych, które pozostaną w sygnale po filtracji.

Sygnał III - etapy



Składowa sinusoidalna

Składowa sinusoidalna z szumem

Wynik filtracji składowej sinusoidalnej z szumem

PROGRAM ROZWOJOWY
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

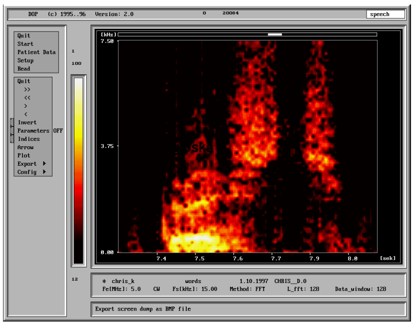
Zastosowania przetwarzania sygnałów - przykłady

Prezentacja czasowo-częstotliwościowa sygnału mowy – „treść" - rozkład mocy sygnału na płaszczyźnie czas-częstotliwość. Widoczne tzw. formanty głoski "e".

głoska e

czas →

↑ częstotliwość



czas →

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

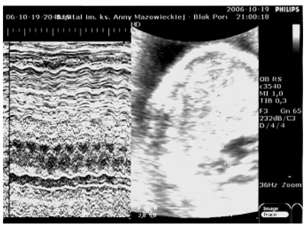
PROGRAM ROZWOJOWY
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

Zastosowania przetwarzania sygnałów - przykłady

Obrazy i sygnały biomedyczne

Ultrasonografia

Wizualizacja struktur oraz rozkładu prędkości przepływu krwi



Dane prezentowane na obrazach USG (obrazy - sygnały 2D) często są wynikiem przetwarzania ech (sygnałów 1D).

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

PROGRAM ROZWOJOWY POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

Sygnały i ich klasyfikacja

Sygnały:

deterministyczne

okresowe

nieokresowe

(prawie okresowe, stany przejściowe)

losowe (procesy stochastyczne)

niestacjonarne

stacjonarne

ergodyczne

Sygnały:

ciągłe

dyskretne

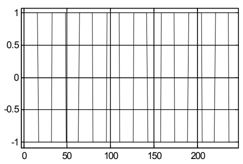
KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

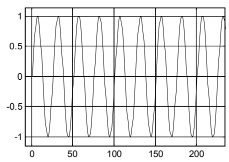
PROGRAM ROZWOJOWY POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

Przykłady sygnałów I

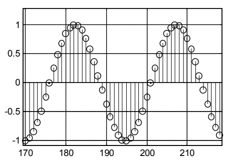
sygnały deterministyczne



Ciąg impulsów prostokątnych



sygnał cosinusoidalny



Dyskretny sygnał cosinusoidalny

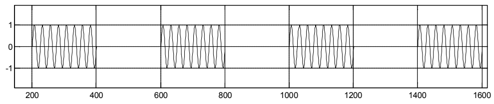
KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

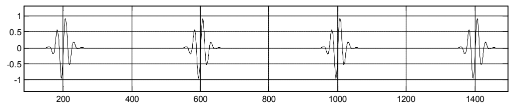
PROGRAM ROZWOJOWY POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

Przykłady sygnałów II

sygnały deterministyczne



Ciąg paczek fali sinusoidalnej



Ciąg impulsów gaussowskich (pojedynczy element - fala sinusoidalna z obwiednią gaussowską, tzw. paczka gaussowska.

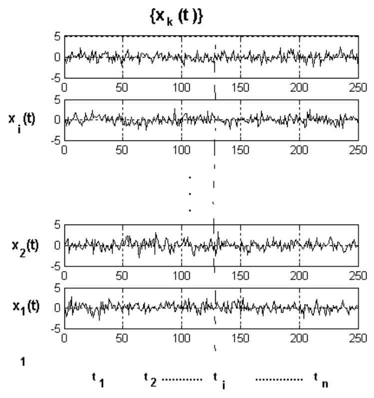
Jest to sygnał pomiarowy stosowany np. w defektoskopii

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

PROGRAM ROZWOJOWY POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

Procesy losowe (stochastyczne)



$\{x_k(t)\}$ rodzina funkcji zmiennej losowej i czasu – proces stochastyczny

$x_k(t)$ k-ta realizacja procesu - funkcja czasu dla pewnej wartości zmiennej losowej (wyniku zdarzenia losowego)

$X(t_i)$ wartości procesu dla ustalonego czasu są wartościami zmiennej losowej

Zmienna losowa – funkcja określona na zbiorze zdarzeń i przyjmująca wartości rzeczywiste (z określonym prawdopodobieństwem)

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

PROGRAM ROZWOJOWY
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

Podstawy teoretyczne

przetwarzania sygnałów

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

PROGRAM ROZWOJOWY
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

Wartość średnia, energia, moc sygnału

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Wartość średnia, energia, moc

Podstawowe parametry sygnałów to wartość średnia, energia i moc, zdefiniowane poniższymi zależnościami:

wartość średnia sygnału w przedziale $[t_1,t_2]$:

$$E[x] = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} x(t)dt$$

w przypadku sygnału o nieskończonym czasie trwania wartość średnia jest następującą wielkością graniczną:

$$E[x] = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x(t)dt$$

jeśli sygnał jest okresowy o okresie T_o

$$E[x] = \frac{1}{T_o}\int_{t_o}^{t_o+T} x(t)dt$$

Wartość średnia, energia, moc

Energia sygnału

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t)dt$$

moc

$$P_x = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x^2(t)dt$$

w przypadku sygnału okresowego moc:

$$P_x = \frac{1}{T_o}\int_{t_o}^{t_o+T} x^2(t)dt$$

Kolejny parametr sygnału stanowi jego wartość skuteczna, równa pierwiastkowi kwadratowemu z mocy sygnału.

Energia i moc - klasyfikacja sygnałów

Sygnały – ze względu na właściwości zdefiniowanych powyżej wielkości można podzielić na sygnały o ograniczonej energii, jeśli $E_x<\infty$, oraz sygnały o skończonej mocy, jeśli $P_x<\infty$.

Moc sygnałów o ograniczonej energii jest równa 0, zaś energia sygnałów o skończonej mocy jest nieskończona.

Tak więc możemy mieć do czynienia z sygnałami o ograniczonej energii i skończonym czasie trwania, sygnałami o ograniczonej energii i nieskończonym czasie trwania, sygnałami nieokresowymi o ograniczonej mocy (np. sygnał stały) oraz z sygnałami okresowymi o ograniczonej mocy.

Uwaga - sygnały spróbkowane - jako skończone zbiory próbek, możemy traktować zarówno jak sygnały o skończonym czasie trwania, jak i sygnały okresowe, których przedłużeniem okresowym jest właśnie spróbkowany sygnał.

PROGRAM ROZWOJOWY
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

Splot i dystrybucja delta Diraca

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

PROGRAM ROZWOJOWY
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

Splot dwóch funkcji

Definicja

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau$$

Właściwości splotu

Przemienność

$$f_1(t) * f_2(t) = f_2(t) * f_1(t)$$

Rozdzielność względem dodawania

$$f_1(t) * [f_2(t) + f_3(t)] = f_1(t) * f_2(t) + f_1(t) * f_3(t)$$

Łączność

$$f_1(t) * [f_2(t) * f_3(t)] = [f_1(t) * f_2(t)] * f_3(t)$$

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

PROGRAM ROZWOJOWY
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

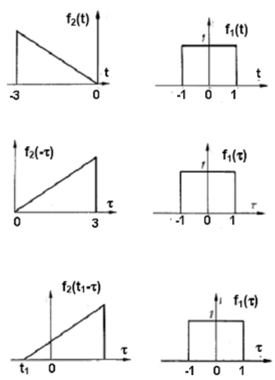
Splot dwóch funkcji

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau$$

Przykład

odwrócenie f_2(t) i zmiana argumentu osi czasu!!!

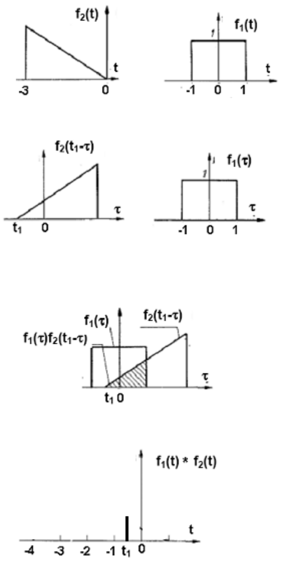
przesunięcie f_2(t) o t_1



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Splot dwóch funkcji



Przykład

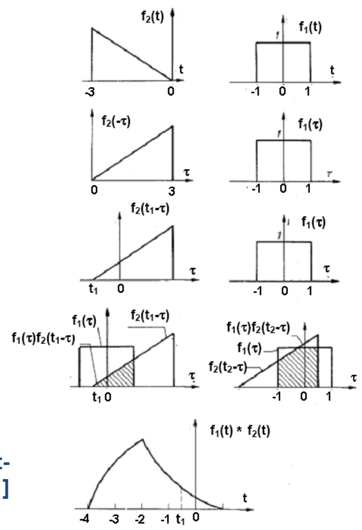
$$f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau$$

Wyznaczenie całki z iloczynu $f_1(t)$ i $f_2(t-t_1)$ - czyli zakreskowanego pola

otrzymujemy wartość splotu dla t= t_1

PROGRAM ROZWOJOWY
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

Splot dwóch funkcji



Przykład

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau$$

Wyznaczenie całki z iloczynu $f_1(t)$ i $f_2(t-t_1)$ dla t_1 przebiegających zbiór [-4,1] daje niezerowe wartości splotu.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

PROGRAM ROZWOJOWY POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

Dystrybucja delta Diraca I

Właściwości dystrybucji

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) = 1$$

dla

$t \neq 0$

$\delta(t) = 0$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t) = f(0)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t - t_0) = f(t_0)$$

Definicje graniczne dystrybucji:

ciąg funkcji prostokątnych: $\delta(t) = \lim_{\tau \to 0} \frac{1}{\tau}[1(t + \tau/2) - 1(t - \tau/2)]$

ciąg funkcji trójkątnych: $\delta(t) = \lim_{\tau \to 0} \frac{2}{\tau}[1 - \frac{|t|}{\tau}]$

ciąg funkcji sin(x)/x=sinc(x): $\delta(t) = \lim_{k \to \infty} \frac{k}{\pi} \mathrm{sinc}(kt)$

gdzie 1(t) - skok jednostkowy

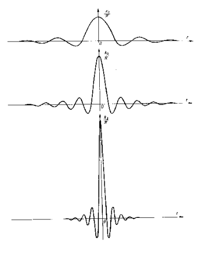
dla |t|<τ, 0 poza tym przedziałem;

PROGRAM ROZWOJOWY POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

Dystrybucja delta Diraca II

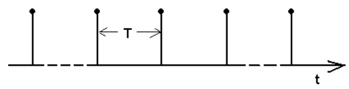
Dystrybucja jako granica ciągu sinc:

$$\delta(t) = \lim_{k \to \infty} \frac{k}{\pi} \mathrm{sinc}(kt)$$



Ciąg dystrybucji :

$$\delta_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT)$$



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

Splot funkcji z dystrybucją delta Diraca

Właściwości dystrybucji Diraca:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t-t_0) = f(t_0)$$

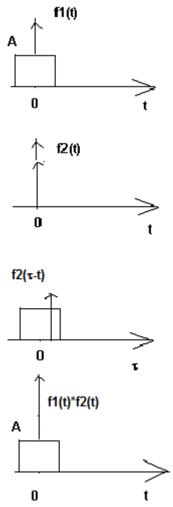
$$f(t)*\delta(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\delta(t-\tau)d\tau = f(t)$$

Splot funkcji $f_1(t)$ będącej oknem prostokątnym o amplitudzie A i czasie trwania a usytuowanym w początku układu oraz funkcji $f_2(t)$ - delty Diraca, usytuowanej w początku układu:

$$f_1(t) = a[1(t+a/2) - 1(t-a/2)] = Arect(0,a)$$

$$f_2(t) = \delta(t)$$

$$f_1(t)*f_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau)\delta(t-\tau)d\tau = f_1(t) = Arect(0,A)$$



Splot funkcji z dystrybucją

Właściwości dystrybucji Diraca:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t-t_0) = f(t_0)$$

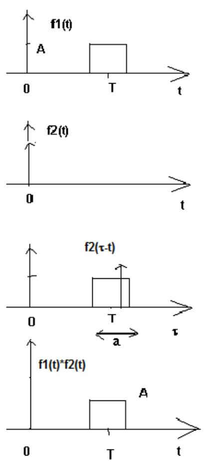
$$f(t)*\delta(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\delta(t-\tau)d\tau = f(t)$$

Splot funkcji $f_1(t)$ będącej oknem prostokątnym o amplitudzie A usytuowanym w przedziale [T-a/2, T+a/2] oraz funkcji $f_2(t)$ - delty Diraca, usytuowanej w początku układu:

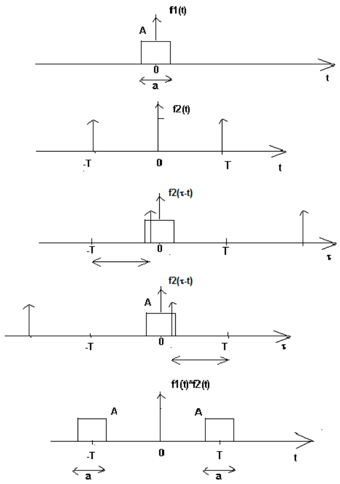
$$f_1(t) = Arect(-T,a)$$

$$f_2(t) = \delta(t)$$

$$f_1(t)*f_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau)\delta(t-\tau)d\tau = f_1(t) = Arect(T,a)$$



Splot funkcji z dystrybucją



Właściwości dystrybucji Diraca:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t-t_0) = f(t_0)$$

$$f(t)*\delta(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\delta(t-\tau)d\tau = f(t)$$

Splot funkcji $f_1(t)$ będącej oknem prostokątnym o amplitudzie A usytuowanym w przedziale [T-a/2, T+a/2] oraz funkcji $f_2(t)$ - pary delt Diraca, usytuowanych w punktach -T i T:

$$f_1(t) = Arect(0,a)$$

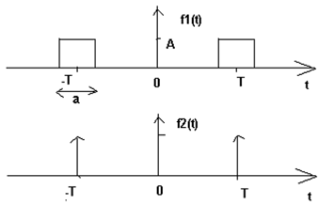
$$f_2(t) = \delta(t+T)+\delta(t-T)$$

$$f_1(t)*f_2(t) = f_1(t)*[\delta(t+T)+\delta(t-T)] = f_1(t)*\delta(t+T)+f_1(t)*\delta(t-T) =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau)\delta(t+T-\tau)d\tau + \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau)\delta(t-T-\tau)d\tau = f_1(t+T)+f_1(t-T) = Arect(-T,a)+Arect(T,a)$$

Splot funkcji z dystrybucją Diraca

Splot funkcji $f_1(t)$ będącej sumą dwóch okien prostokątnych o amplitudzie A usytuowanych w przedziałach [-T-a/2, -T+a/2] oraz [T-a/2, T+a/2] oraz funkcji $f_1(t)$ - sumy dwóch delt Diraca o amplitudach k, usytuowanych w punktach -T i T. Mamy



$$f_1(t) = Arect(-T,a) - Arect(T,a)$$

$$f_2(t) = \delta(t+T)+\delta(t-T)$$

??????

PROGRAM ROZWOJOWY POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

Splot funkcji z dystrybucją delta Diraca

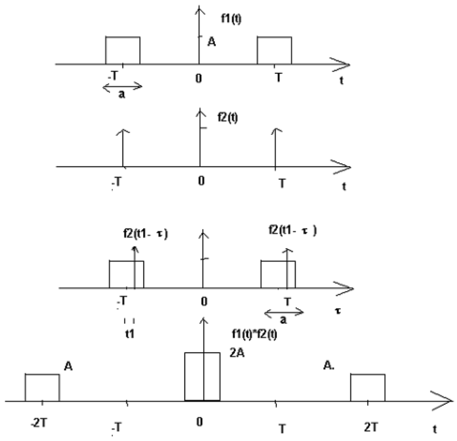
Splot funkcji $f_1(t)$ będącej sumą dwóch okien prostokątnych o amplitudzie A usytuowanych w przedziałach [-T-a/2, -T+a/2] oraz [T-a/2, T+a/2] oraz funkcji $f_1(t)$ - sumy dwóch delt Diraca o amplitudach k, usytuowanych w punktach -T i T. Mamy

$$f_1(t) = Arect(-T,a) - Arect(T,a)$$

gdzie Arect(t,a) oznacza okno prostokątne usytuowane w punkcie t, o szerokości (czasie trwania) a oraz amplitudzie A,

oraz

$$f_2(t) = \delta(t+T) + \delta(t-T)$$

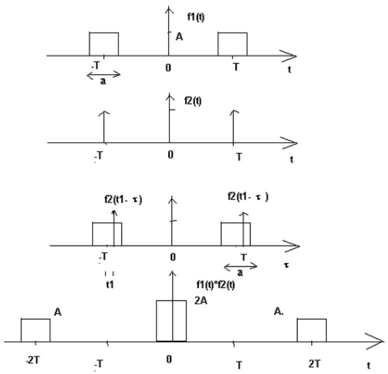


KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

PROGRAM ROZWOJOWY POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

Splot funkcji z dystrybucją



Mamy

$$f_1(t) = Arect(-T,a) - Arect(T,a)$$

$$f_2(t) = \delta(t+T) + \delta(t-T)$$

$$f_1(t) * f_2(t) = [Arect(-T,a) - Arect(T,a)] * [\delta(t+T) + \delta(t-T)] =$$

$$= [Arect(-T,a) - Arect(T,a)] * \delta(t+T) + [Arect(-T,a) - Arect(T,a)] * \delta(t-T) =$$

$$= Arect(-T,a) * \delta(t+T) - Arect(T,a) * \delta(t+T) + Arect(-T,a)\delta(t-T) - Arect(T,a)\delta(t-T) =$$

$$= Arect(-T,a) * \delta(t+T) - Arect(T,a) * \delta(t+T) + Arect(-T,a) * \delta(t-T) - Arect(T,a) * \delta(t-T) =$$

$$= Arect(-2T,a) + 2Arect(0,a) + Arect(2T,a)$$

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

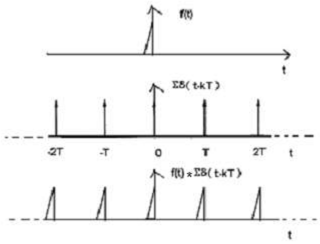
Splot funkcji z ciągiem dystrybucji delta Diraca

$$\delta_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t-kT)$$

$$f(t) * \delta(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\delta(t-\tau)d\tau = f(t)$$

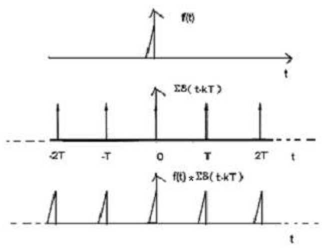
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t-t_0) = f(t_0)$$

$$f(t) * \delta_T(t) = f(t) * \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t-kT) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(t-kT)$$



Splot funkcji z ciągiem dystrybucji delta Diraca

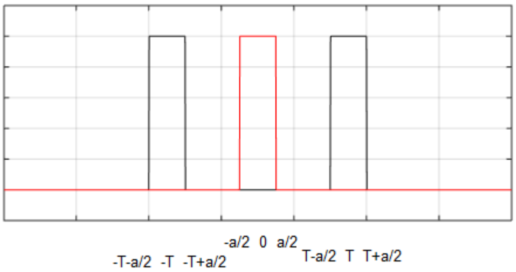
$$f(t) * \delta_T(t) = f(t) * \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t-kT) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(t-kT)$$



Narzędzie budowania sygnału okresowego - umożliwiające zwarty i wygodny w analizie (zwłaszcza w analizie widmowej) zapis formalny sygnału!!!!

np. okresowy przebieg prostokątny jest splotem ciągu delt Diraca o okresie równym okresowi tego przebiegu i pojedynczego okna prostokątnego o odpowiednich parametrach (amplituda, czas trwania).

Splot dwóch funkcji (okien) prostokątnych

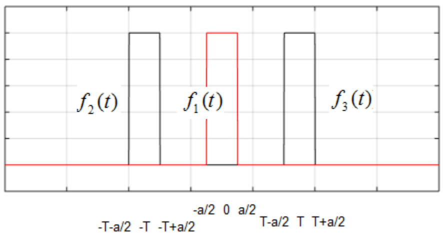


$$f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau$$

$$f_1(t) * [f_2(t) + f_3(t)] = f_1(t) * f_2(t) + f_1(t) * f_3(t)$$

PROGRAM ROZWOJOWY
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

Splot dwóch funkcji (okien) prostokątnych

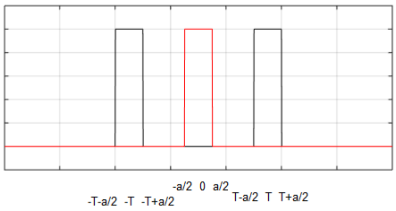


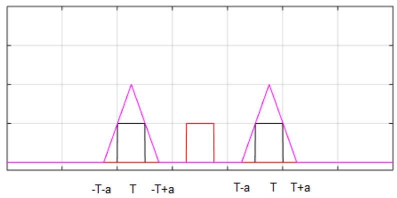
$$f_1(t) * [f_2(t) + f_3(t)] = f_1(t) * f_2(t) + f_1(t) * f_3(t)$$

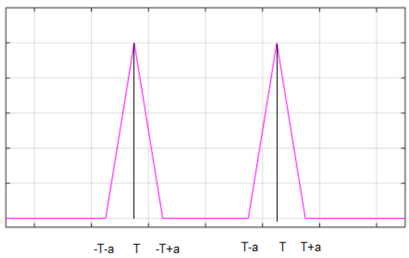
KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

PROGRAM ROZWOJOWY
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

Splot dwóch funkcji (okien) prostokątnych







KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

PROGRAM ROZWOJOWY
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

Liczby zespolone

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Liczby zespolone

Liczba zespolona – para uporządkowana (x,y) liczb rzeczywistych x, y∈R

z=(x,y) x - część rzeczywista z, y - część urojona z

Działania arytmetyczne na liczbach zespolonych z=(x,y), w=(u,v) :

Dodawanie $z+w=(x,y)+(u,v)=(x+u,y+v)$

Odejmowanie $z-w=(x,y)-(u,v)=(x-u,y-v)$

Mnożenie $z\cdot w=(x,y)\cdot(u,v)=(xu-yv,xv+yu)$

Dzielenie $\frac{z}{w}=\frac{(x,y)}{(u,v)}=(\frac{xu+yv}{u^2+v^2},\frac{xv-yu}{u^2+v^2})$

PROGRAM ROZWOJOWY
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

Liczby zespolone

Liczba zespolona (x,0)- liczba rzeczywista x

Liczba zespolona (0,1) - jednostka urojona j (czasem i)

ponieważ $(0,1)\cdot(0,1)=(-1,0)$

jednostka urojona : $j^2=-1$

ponieważ $z=(x,y)=(x,0)+(0,y)=(x,0)+(0,1)(0,y)$

to $z=(x,y)=x+jy$

część rzeczywista: $\mathrm{Re}(z)=x$

część urojona: $\mathrm{Im}(z)=y$

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Liczby zespolone

Liczba sprzężona z liczbą z: $z^* = (x, -y) = x - jy$

Inne zależności

$$z \cdot w = (x + jy) \cdot (u + jv) = (xu - yv) + j(xv + yu)$$

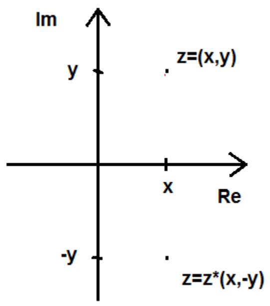
$$z \cdot z^* = (x, y)(x, -y) = (x + jy)(x - jy) = x^2 + y^2$$

$$\frac{z}{w} = \frac{z}{w}\frac{w^*}{w^*} = \frac{(x + jy)(u - jv)}{(u + jv)(u - jv)} =$$

$$= \frac{(xu + yv) + j(xv - yu)}{u^2 + v^2} = \frac{(xu + yv)}{u^2 + v^2} + j\frac{(xv - yu)}{u^2 + v^2}$$

Liczby zespolone

Interpretacja graficzna:



Każdemu punktowi P(x,y) płaszczyzny Oxy odpowiada liczba zespolona x+jy i odwrotnie.

Oxy – płaszczyzna zespolona

Liczbom zespolonym o części urojonej równej 0 odpowiada oś Ox, Imz=0, oś rzeczywista.

Liczbom zespolonym o części rzeczywistej równej 0 odpowiada oś Oy, Rez=0, oś urojona.

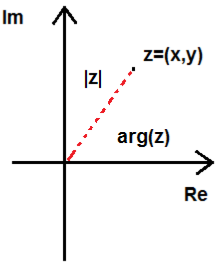
Liczby zespolone

moduł liczby zespolonej: $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$

Interpretacja geometryczna – moduł jest miarą długości promienia wodzącego punktu (x,y), inaczej odległości tego punktu od początku układu.

argument liczby zespolonej z=x+jy<>0

$$\cos\varphi=\frac{x}{|z|}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad \sin\varphi=\frac{y}{|z|}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$



każda liczba zespolona ma nieskończenie wiele argumentów, argument należący do przedziału $(-\pi, \pi]$ nazywamy argumentem głównym i oznaczamy arg z. Zbiór argumentów

Argz={argz+2kπ}.

Interpretacja geometryczna cd – argument jest miarą kąta, jaki tworzy wektor wodzący punktu (x,y) z osią Rez.

PROGRAM ROZWOJOWY
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

Liczby zespolone

Zależności

Jeśli $z_1, z_2 \in Z$ i $z_2 \neq 0$, to:

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2| \qquad Arg(z_1 z_2) = Arg(z_1) + Arg(z_2)$$

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \qquad Arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = Arg(z_1) - Arg(z_2)$$

$$zz^* = |z|^2$$

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Liczby zespolone

Postać trygonometryczna liczby zespolonej:

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}(\cos\varphi + j\sin\varphi) = r(\cos\varphi + j\sin\varphi)$$

iloczyn i iloraz dwóch liczb zespolonych w zapisie trygonometrycznym:

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + j\sin\varphi_1) \qquad z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + j\sin\varphi_2)$$

$$|z_1 z_2| = r_1 r_2[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + j\sin(\varphi_1 + \varphi_2)] \qquad |\frac{z_1}{z_2}| = |\frac{r_1}{r_2}|[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + j\sin(\varphi_1 - \varphi_2)$$

wzór de Moivre'a: $(\cos\varphi + j\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + j\sin n\varphi$

PROGRAM ROZWOJOWY
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

Liczby zespolone

Postać wykładnicza liczby zespolonej: $z = \sqrt{x^2 + y^2}e^{j\varphi} = re^{j\varphi} = re^{j\arg(z)}$

iloczyn i iloraz dwóch liczb zespolonych w zapisie wykładniczym:

$$z_1 = r_1 e^{j\varphi_1} \qquad z_2 = r_2 e^{j\varphi_2}$$

$$|z_1 z_2| = r_1 r_2 e^{j(\varphi_1 + \varphi_2)} \qquad |\frac{z_1}{z_2}| = |\frac{r_1}{r_2}|e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

wzór de Moivre'a: $z^n = r^n e^{jn\varphi}$

$$z^* = re^{-j\varphi} \qquad z^{1/n} = r^{1/n} e^{j(\arg z + 2k\pi)/n}$$

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Funkcje zespolone

Funkcja zespolona zmiennej rzeczywistej

Funkcja przyjmująca wartości zespolone, argument rzeczywisty

$x \in R$, f(x)=u(x)+jv(x)=Rez(x) + j Imz(x)

Funkcja zespolona zmiennej zespolonej

Funkcja przyjmująca wartości zespolone, argument zespolony

$x,y \in R$, z=x+jy

f(t)=f(x+jy)=u(z)+jv(z)=u(x+jy)+jv(x+jy)=Re[f(z)] + j Im[f(z)]

Funkcja zespolona zmiennej zespolonej

Przykład $H(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^{N-1} \exp(-j\omega k)$

jest to suma skończonego szeregu geometrycznego o ilorazie $e^{-j\omega}$

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^{N-1} \exp(-j\omega k) = \sum_{k=0}^{N-1} \exp(-j\omega)^k = \frac{1-e^{-j\omega N}}{1-e^{-j\omega}} = \frac{e^{-j\omega N/2}(e^{j\omega N/2} - e^{-j\omega N/2})}{e^{-j\omega/2}(e^{j\omega/2} - e^{-j\omega/2})} =$$

$$= \frac{e^{-j\omega N/2}[\cos(\omega N/2) + j\sin(\omega N/2) - [\cos(-\omega N/2) + j\sin(-\omega N/2)]]}{e^{-j\omega/2}(e^{j\omega/2} - e^{-j\omega/2})}$$

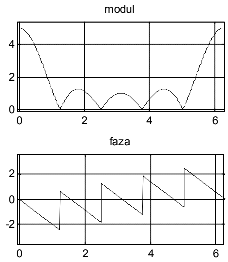
PROGRAM ROZWOJOWY
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

Funkcja zespolona zmiennej zespolonej

Przykład $H(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^{N-1} \exp(-j\omega k)$

jest to suma skończonego szeregu geometrycznego o ilorazie $e^{-j\omega}$

$$|H(e^{j\omega})| = \left|\frac{\sin(\omega N/2)}{\sin(\omega/2)}\right|$$



$$H(e^{j\omega}) = \frac{e^{-j\omega N/2} e^{j\omega/2} [\cos(\omega N/2) + j\sin(\omega N/2) - \cos(\omega N/2) + j\sin(\omega N/2)]}{(e^{j\omega/2} - e^{-j\omega/2})} =$$

$$= \frac{2j\sin(\omega N/2)}{2j\sin(\omega/2)} e^{-j(N-1)\omega/2} = \frac{\sin(\omega N/2)}{\sin(\omega/2)} e^{-j(N-1)\omega/2} = |H(e^{j\omega})| \exp(\arg[H(e^{j\omega})])$$

$$|H(e^{j\omega})| = \left|\frac{\sin(\omega N/2)}{\sin(\omega/2)}\right| \qquad \arg(H(e^{j\omega})) = -(N-1)\omega/2$$

$$\arg(H(e^{j\omega})) = -(N-1)\omega/2$$

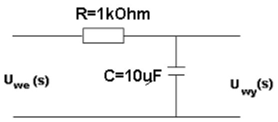
KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

PROGRAM ROZWOJOWY
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

Funkcja zespolona zmiennej zespolonej

Przykłady:



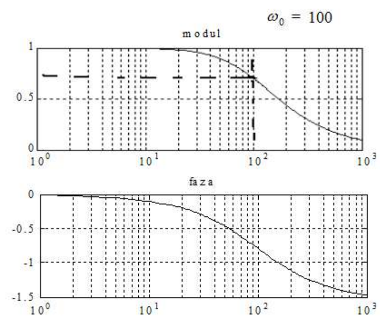
$$H(s) = \frac{\frac{1}{sC}}{R + \frac{1}{sC}} = \frac{\frac{1}{RC}}{s + \frac{1}{RC}} = \frac{\omega_0}{s + \omega_0}$$

$$s = \sigma + j\omega \to j\omega$$

$$H(j\omega) = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{\frac{1}{RC}}{j\omega + \frac{1}{RC}} = \frac{\omega_0}{j\omega + \omega_0}$$

$$|H(j\omega)| = \frac{\omega_0}{|j\omega + \omega_0|} = \frac{\omega_0}{\sqrt{\omega^2 + \omega_0^2}}$$

$$\arg(H(j\omega)) = -arctg(\frac{\omega}{\omega_0})$$



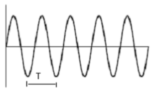
KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

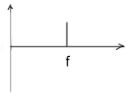
PROGRAM ROZWOJOWY
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

Dziedziny prezentacji i analizy sygnałów

Dziedzina czasu – dziedzina częstotliwości



$$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega}$$



Sygnał okresowy — **związek okres-częstotliwość** — **widmo sygnału**

T – okres, f – częstotliwość, ω – pulsacja (częstotliwość kołowa)

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

PROGRAM ROZWOJOWY
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

Dziedziny i metody przetwarzania sygnałów

Dziedzina czasu:

filtracja
metody korelacyjne

Dziedzina częstotliwości

analiza widmowa – szereg i przekształcenie Fouriera!!!!

Połączone dziedziny czasu i częstotliwości

prezentacje czasowo-częstoliwościowe

analiza falkowa

Inne kompresja, kodowanie, transmisja....

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY