PROGRAM ROZWOJOWY POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

# PRZETWARZANIE SYGNAŁÓW

SEMESTR V

*Człowiek- najlepsza inwestycja*

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

*Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego*

1

PROGRAM ROZWOJOWY POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

PRZETWARZANIE SYGNAŁÓW

**Opiekun przedmiotu**
**prof. nzw. dr hab. inż. Krzysztof Kałużyński**

**Wykład**
**prof. nzw. dr hab. inż. Krzysztof Kałużyński (współautor dr inż. Krzysztof Mikołajczyk)**

**laboratorium**
**dr inż. Beata Leśniak-Plewińska (kierownik), dr inż. Szymon Cygan, dr inż. Jakub Żmigrodzki, mgr inż. Iryna Gorbenko**

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

2

PROGRAM ROZWOJOWY POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

## Uzyskiwane kompetencje

**Znajomość podstawowych pojęć i metod opisu sygnałów ciągłych i dyskretnych jedno- i dwuwymiarowych, znajomość podstaw przetwarzania sygnałów i obrazów.**

**Umiejętność przetwarzania sygnałów z wykorzystaniem poznanych metod i narzędzi.**

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

3

PROGRAM ROZWOJOWY POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

**LITERATURA**


1. **T.P. Zieliński Cyfrowe przetwarzanie sygnałów, WKiŁ 2005**
2. **R.G.Lyons Wprowadzenie do cyfrowego przetwarzania sygnałów, WKiŁ 2006**
3. **W.Malina, M.Smiatacz Metody cyfrowego przetwarzania obrazów, Exit 2005**
4. **R.Tadeusiewicz, P.Korohoda Komputerowa analiza i przetwarzanie obrazów, Kraków Wydawnictwo Fundacji Postępu Telekomunikacji 1997**


KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

7

PROGRAM ROZWOJOWY POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

Wykład I

# Wprowadzenie

# Podstawy teoretyczne przetwarzania sygnałów

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

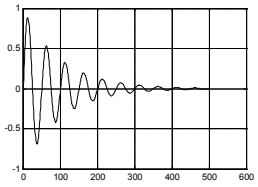
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

8

PROGRAM ROZWOJOWY POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

## Sygnały

**Sygnał – funkcja czasu (najczęściej) przedstawiająca przebieg parametru pewnego zjawiska, wielkości fizycznej**




**Przykład sygnału – stan przejściowy po udarze**

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

9

PROGRAM ROZWOJOWY POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

## Zastosowania przetwarzania sygnałów I

Telekomunikacja – usuwanie echa, kompresja, filtracja, multipleksowanie, wideokonferencje itd.

Technika militarna – echolokacja, radiolokacja, naprowadzanie pocisków, bezpieczeństwo informacji itd.

Przemysł – sterowanie, badania nieniszczące, analiza drgań, mikrogeometria powierzchni itd.

Technika samochodowa – inteligentne zawieszenia, elektroniczne sterowanie i systemy hamowania, autonomiczny pojazd, systemy nawigacyjne, kontrola ciśnienia w oponach, sterowanie działaniem poduszek, multimedia – obecnie około 80% wartości samochodu stanowi elektronika, głównie związana z przetwarzaniem sygnałów i obrazów.

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

10

PROGRAM ROZWOJOWY POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

## Zastosowania przetwarzania sygnałów II

Identyfikacja obiektów (osób)

Analiza danych rynkowych i giełdowych

AGD – „inteligentne" pralki i lodówki

Rozrywka/multimedia – kodowanie i kompresja obrazów i sygnałów, efekty specjalne

Biologia, ekologia – analiza zmian populacji zwierząt, analiza aktywności organizmów

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

11

PROGRAM ROZWOJOWY POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

## Zastosowania przetwarzania sygnałów III

Rozpoznawanie i generacja mowy

Geologia – poszukiwanie złóż surowców, prognozowanie trzęsień ziemi (i innych zjawisk)

Badania kosmiczne – kompresja danych, analiza zdjęć pochodzących z kosmosu, analiza sygnałów pochodzących z różnych czujników umieszczonych w przestrzeni

Medycyna – obrazowanie, przetwarzanie i analiza sygnałów biomedycznych, wspomaganie słuchu, inteligentne protezy kończyn, urządzenia do wspomagania funkcji narządów, kompresja danych.

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

12

PROGRAM ROZWOJOWY POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

## Sygnały i ich klasyfikacja

**Sygnały:**

| deterministyczne | losowe (procesy stochastyczne) |
|---|---|
| okresowe | niestacjonarne |
| nieokresowe | stacjonarne |
| (prawie okresowe | ergodyczne |
| stany przejściowe) | |

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

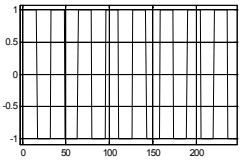
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

13

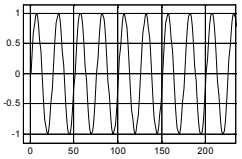
PROGRAM ROZWOJOWY POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

## Przykłady sygnałów I

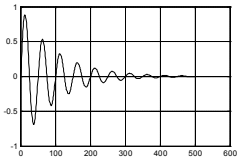
## sygnały deterministyczne




Ciąg impulsów prostokątnych




sygnał cosinusoidalny




Sygnał sinusoidalny tłumiony

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

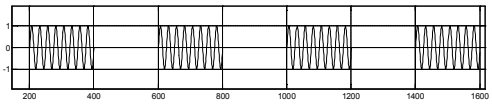
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

14

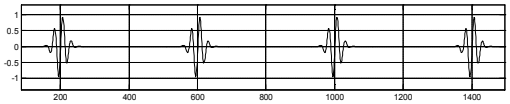
PROGRAM ROZWOJOWY POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

## Przykłady sygnałów II

## sygnały deterministyczne




Ciąg paczek fali sinusoidalnej




Ciąg impulsów gaussowskich (pojedyncza ewolucja – sygnał sinusoidalny z obwiednią gaussowską, tzw. paczka gaussowska).

Jest to sygnał pomiarowy stosowany np. w defektoskopii

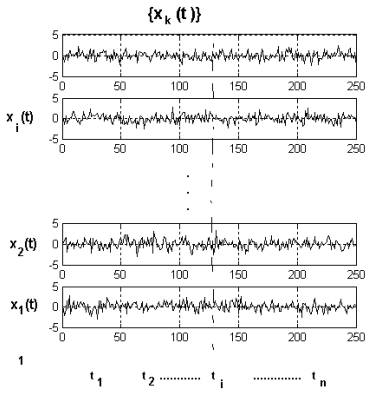
KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

15

PROGRAM ROZWOJOWY POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

## Procesy losowe (stochastyczne)




$\{x_k(t)\}$ rodzina funkcji zmiennej losowej i czasu – proces stochastyczny

$x_k(t)$ k-ta realizacja procesu - funkcja czasu dla pewnej wartości zmiennej losowej (wyniku zdarzenia losowego)

$X(t_i)$ wartości procesu dla ustalonego czasu są wartościami zmiennej losowej

Zmienna losowa – funkcja określona na zbiorze zdarzeń i przyjmująca wartości rzeczywiste (z określonym prawdopodobieństwem)

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

16

PROGRAM ROZWOJOWY POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

## Sygnały ciągłe a sygnały dyskretne

**Sygnały:**

**Ciągłe (czasu ciągłego, analogowe)**

-przebiegi parametrów zjawisk/procesów fizycznych, obserwowane np. na ekranie oscyloskopu analogowego

-sygnał akustyczny (dźwięk)

**dyskretne:**

-dane giełdowe

-obserwacje aktywności organizmów żywych

-dane pomiarowe/eksperymentalne po operacji próbkowania!!!

-dane symulowane

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

17

PROGRAM ROZWOJOWY POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

## Sygnały ciągłe a sygnały dyskretne

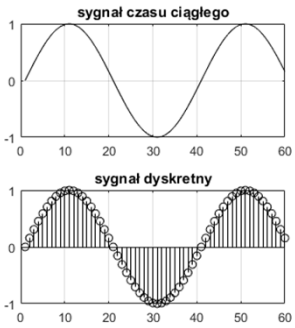
**Sygnały:**

**ciągłe - we współczesnej technice i nauce bardzo rzadko są obiektem przetwarzania;**

**dyskretne - we współczesnej technice i nauce przetwarzanie dotyczy sygnałów dyskretnych, powstających w wyniku konwersji analogowo-cyfrowej sygnałów ciągłych;**

**Sygnały dyskretne bywają przedstawiane jako sygnały ciągłe (łatwiejsza interpretacja);**

**Podstawowe narzędzia przetwarzania sygnałów omawiane będą w ramach wykładu przede wszystkim w dziedzinie czasu ciągłego.**



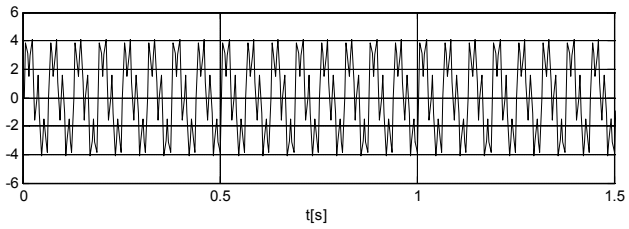

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

18

PROGRAM ROZWOJOWY POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

## Sygnał I - przebieg czasowy




**Powyższy sygnał jest kombinacją liniową kilku składowych okresowych (sinusoidalnych). Jakie są amplitudy i częstotliwości tych składowych??**

**Odpowiedź na to pytanie na podstawie przebiegu czasowego jest trudna, konieczny jest inny sposób analizy sygnału.**

**Wykorzystuje się w tym celu związek między okresem a częstotliwością sygnału (składowych sygnału).**

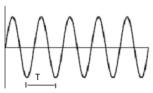
KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

19

PROGRAM ROZWOJOWY POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

## Dziedzina czasu – dziedzina częstotliwości



$$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega}$$

**Sygnał okresowy** **związek okres-częstotliwość** **widmo sygnału**

**T – okres, f – częstotliwość, ω – pulsacja (częstotliwość kołowa)**

**Analiza sygnału w dziedzinie częstotliwości – analiza widmowa!!**

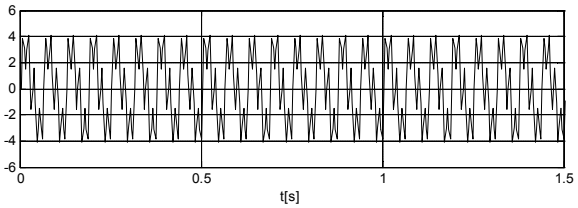
KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

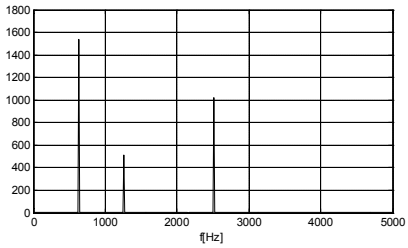
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

20

PROGRAM ROZWOJOWY POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

## Sygnał I i wynik analizy widmowej




**Sygnał zawiera 3 składowe sinusoidalne o różnych amplitudach i częstotliwościach. Wysokości poszczególnych maksimów są proporcjonalne do amplitud składowych.**

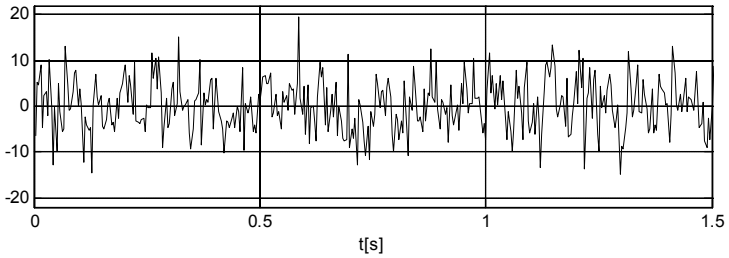
KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

21

PROGRAM ROZWOJOWY POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

## Sygnał II - przebieg czasowy




**Jakie są składowe sygnału??**

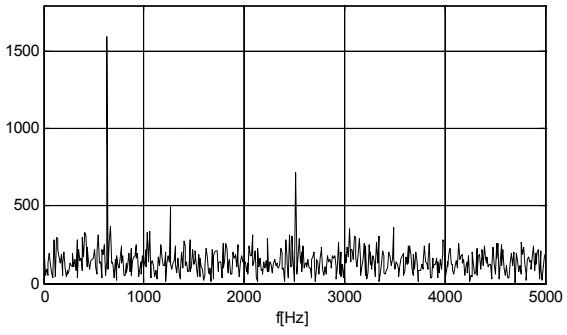
KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

22

PROGRAM ROZWOJOWY POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

## Sygnał II - wynik analizy widmowej




**Sygnał zawiera 3 składowe sinusoidalne o różnych amplitudach i częstotliwościach oraz szum**

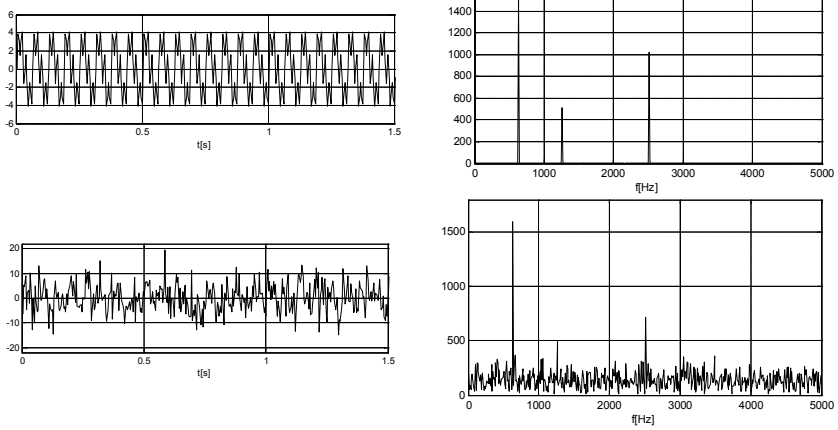
KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

23

PROGRAM ROZWOJOWY
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

## Porównanie przedstawienia sygnału I i II w dziedzinie czasu i częstotliwości



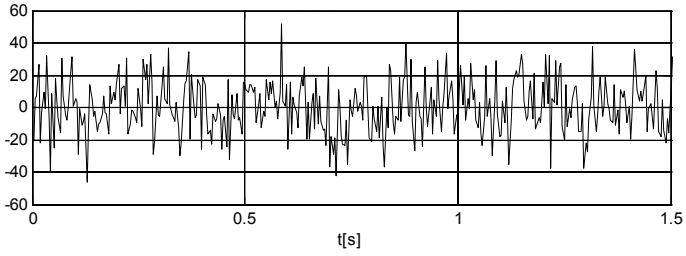

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

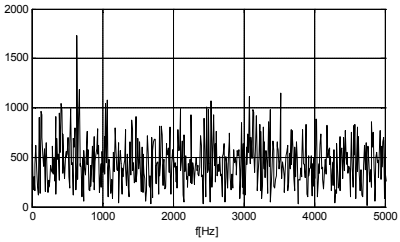
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

24

PROGRAM ROZWOJOWY
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

## Sygnał III - przebieg czasowy i wynik analizy widmowej




**Sygnał zawiera 1 składową sinusoidalną oraz szum o dużej amplitudzie w stosunku do amplitudy składowej sinusoidalnej.**

**TRUDNA INTERPRETACJA !!**

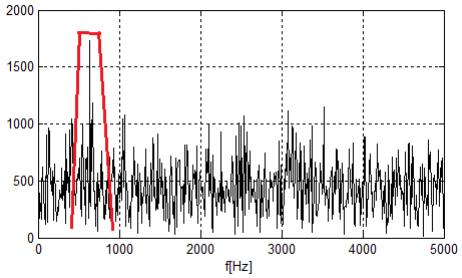
KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

25

PROGRAM ROZWOJOWY POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

## Sygnał III - wynik analizy widmowej




Sygnał zawiera 1 składową sinusoidalną oraz szum o dużej amplitudzie w stosunku do amplitudy składowej sinusoidalnej.

TRUDNA INTERPRETACJA !!

Powyżej zaproponowano ograniczenie zakresu częstotliwości sygnału, tak, aby zachować interesującą nas składową sinusoidalną. Ograniczenia takie realizowane jest przy pomocy filtracji (układ elektroniczny, algorytm - filtracja cyfrowa).

Czerwony trapez określa zbiór składowych częstotliwościowych, które pozostaną w sygnale po filtracji.

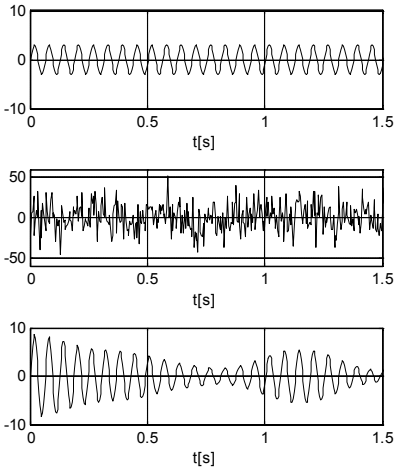
KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

26

PROGRAM ROZWOJOWY POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

## Sygnał III - etapy




Składowa sinusoidalna

Składowa sinusoidalna z szumem

Wynik filtracji składowej sinusoidalnej z szumem

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

27

PROGRAM ROZWOJOWY POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

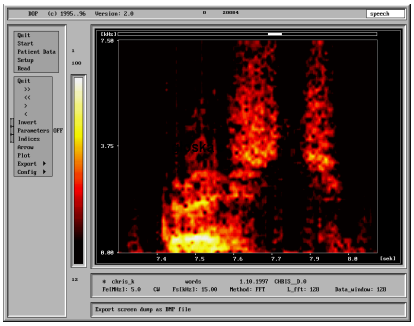
## Zastosowania przetwarzania sygnałów - przykłady

Prezentacja czasowo-częstotliwościowa sygnału mowy – „treść” - rozkład mocy sygnału na płaszczyźnie czas-częstotliwość. Widoczne tzw. formanty głoski “e”.

głoska e

czas →

↑ częstotliwość



czas →

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

28

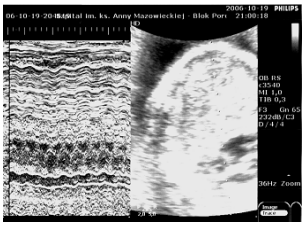
PROGRAM ROZWOJOWY POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

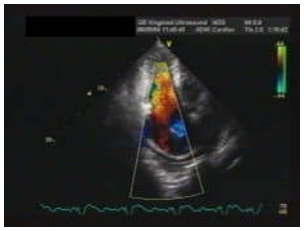
## Zastosowania przetwarzania sygnałów - przykłady

**Obrazy i sygnały biomedyczne**

**Ultrasonografia**

**Wizualizacja struktur oraz rozkładu prędkości przepływu krwi**





**Dane prezentowane na obrazach USG (obrazy - sygnały 2D) często są wynikiem przetwarzania ech (sygnałów 1D).**

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

29

PROGRAM ROZWOJOWY POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

## Podstawy teoretyczne

## przetwarzania sygnałów

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

30

PROGRAM ROZWOJOWY POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

## Wartość średnia, energia, moc sygnału

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

31

PROGRAM ROZWOJOWY POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

## Wartość średnia, energia, moc

Podstawowe parametry sygnałów to wartość średnia, energia i moc, zdefiniowane poniższymi zależnościami:

wartość średnia sygnału w przedziale $[t_1,t_2]$:

$$E[x]=\frac{1}{t_2-t_1}\int_{t_1}^{t_2}x(t)dt$$

sygnał o nieskończonym czasie trwania
wartość średnia jest wielkością graniczną:

$$E[x]=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}x(t)dt$$

wartość średnia sygnału okresowy o okresie $T_o$ :

$$E[x]=\frac{1}{T_o}\int_{t_o}^{t_o+T_o}x(t)dt$$

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

32

PROGRAM ROZWOJOWY POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

## Wartość średnia, energia, moc

energia sygnału:

$$E_x=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2(t)dt$$

moc:

$$P_x=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}x^2(t)dt$$

moc sygnału okresowego:
$T_o$ - okres

$$P_x=\frac{1}{T_o}\int_{t_o}^{t_o+T_o}x^2(t)dt$$

Kolejny parametr sygnału stanowi jego wartość skuteczna, równa pierwiastkowi kwadratowemu z mocy sygnału.

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

33

PROGRAM ROZWOJOWY POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

## Energia i moc - klasyfikacja sygnałów

Sygnały – ze względu na właściwości zdefiniowanych powyżej wielkości można podzielić na sygnały o ograniczonej energii, jeśli $E_x<\infty$, oraz sygnały o skończonej mocy, jeśli $P_x<\infty$.

Moc sygnałów o ograniczonej energii jest równa 0, zaś energia sygnałów o skończonej mocy jest nieskończona.

Tak więc możemy mieć do czynienia z sygnałami o ograniczonej energii i skończonym czasie trwania, sygnałami o ograniczonej energii i nieskończonym czasie trwania, sygnałami nieokresowymi o ograniczonej mocy (np. sygnał stały) oraz z sygnałami okresowymi o ograniczonej mocy.

Uwaga - sygnały spróbkowane - jako skończone zbiory próbek, możemy traktować zarówno jak sygnały o skończonym czasie trwania, jak i sygnały okresowe, których przedłużeniem okresowym jest właśnie spróbkowany sygnał.

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

34

PROGRAM ROZWOJOWY POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

## Splot funkcji

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

35

PROGRAM ROZWOJOWY POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

## Splot dwóch funkcji

**Definicja**

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau$$

**Właściwości splotu**

**Przemienność**

$$f_1(t) * f_2(t) = f_2(t) * f_1(t)$$

**Rozdzielność względem dodawania**

$$f_1(t) * [f_2(t) + f_3(t)] = f_1(t) * f_2(t) + f_1(t) * f_3(t)$$

**Łączność**

$$f_1(t) * [f_2(t) * f_3(t)] = [f_1(t) * f_2(t)] * f_3(t)$$

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

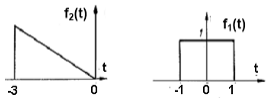
36

PROGRAM ROZWOJOWY POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

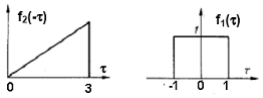
## Splot dwóch funkcji

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau$$

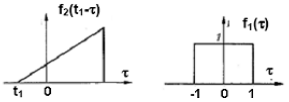
**Przykład**




**odwrócenie $f_2(t)$ i zmiana argumentu osi czasu na $\tau$!!!**




**Przesunięcie odwróconej $f_2(\tau)$ o $t_1$**



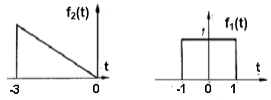

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

37

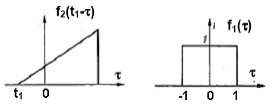
PROGRAM ROZWOJOWY POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

## Splot dwóch funkcji



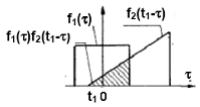

**Przykład**

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau$$

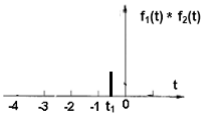



**Wyznaczenie całki z iloczynu $f_1(\tau)$**

**i $f_2(t_1 - \tau)$ - czyli zakreskowanego pola**




**otrzymujemy wartość splotu dla t= $t_1$**



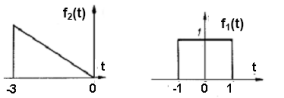

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

38

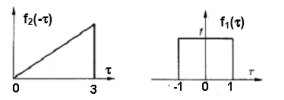
PROGRAM ROZWOJOWY POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

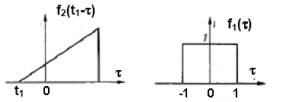
## Splot dwóch funkcji

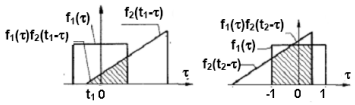



**Przykład**

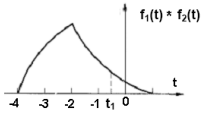
$$f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau$$




**Wyznaczenie całki z iloczynu $f_1(\tau)$ i $f_2(t_1 - \tau)$ dla $t_1$ przebiegających zbiór [-4,1] daje niezerowe wartości splotu.**



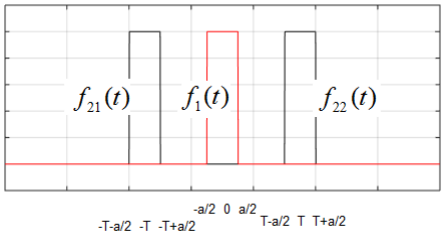

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

39

PROGRAM ROZWOJOWY POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

## Splot dwóch funkcji (okien) prostokątnych




$$f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau \qquad f_2(t) = f_{21}(t) + f_{22}(t)$$

$$f_1(t) * [f_{21}(t) + f_{22}(t)] = f_1(t) * f_{21}(t) + f_1(t) * f_{22}(t)$$

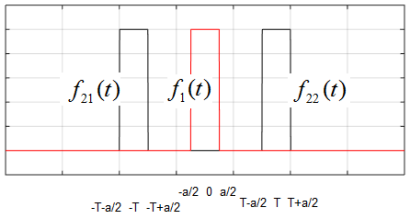
KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

40

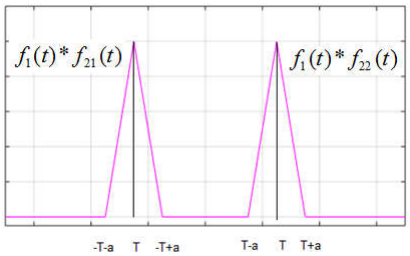
PROGRAM ROZWOJOWY POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

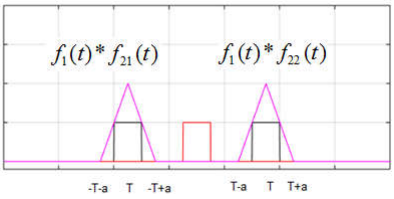
## Splot dwóch funkcji (okien) prostokątnych




$$f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau$$

$$f_2(t) = f_{21}(t) + f_{22}(t)$$




KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

41

PROGRAM ROZWOJOWY POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

# Dystrybucja delta Diraca

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

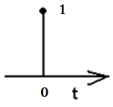
42

PROGRAM ROZWOJOWY POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

## Dystrybucja delta Diraca I

### Definicja i właściwości dystrybucji

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) = 1$$




$$\delta(t) = 0 \qquad dla \qquad t \neq 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t - t_0) = f(t_0)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t) = f(0)$$

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

43

PROGRAM ROZWOJOWY POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

## Dystrybucja delta Diraca I

**Definicje graniczne dystrybucji:**

**ciąg funkcji prostokątnych:** $\delta(t) = \lim_{\tau \to 0} \frac{1}{\tau}[1(t+\tau/2) - 1(t-\tau/2)$ — gdzie 1(t) - skok jednostkowy

**ciąg funkcji trójkątnych:** $\delta(t) = \lim_{\tau \to 0} \frac{2}{\tau}[1 - \frac{|t|}{\tau}]$ — dla $|t|<\tau$, 0 poza tym przedziałem;

**ciąg funkcji sin(x)/x=sinc(x):** $\delta(t) = \lim_{k \to \infty} \frac{k}{\pi}\mathrm{sinc}(kt)$

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

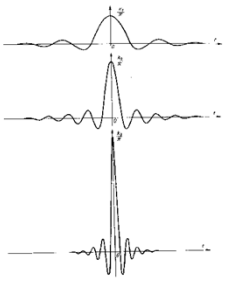
44

PROGRAM ROZWOJOWY POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

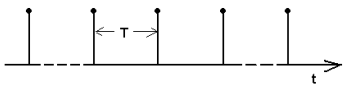
## Dystrybucja delta Diraca II

**Dystrybucja jako granica ciągu sinc:**

$$\delta(t) = \lim_{k \to \infty} \frac{k}{\pi}\mathrm{sinc}(kt)$$



**Ciąg dystrybucji :** $\delta_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT)$



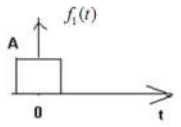

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

45

PROGRAM ROZWOJOWY POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

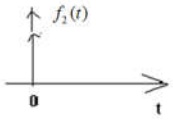
## Splot funkcji z dystrybucją delta Diraca I



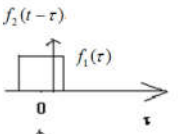

**Właściwości dystrybucji Diraca:**

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t-t_0) = f(t_0)$$

$$f(t) * \delta(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\delta(t-\tau)d\tau = f(t)$$



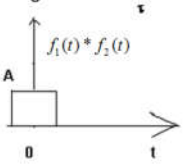

**Splot funkcji $f_1(t)$ będącej oknem prostokątnym o amplitudzie A i czasie trwania a usytuowanym w początku układu Arect(0,a) oraz funkcji $f_2(t)$ delty Diraca, usytuowanej w początku układu:**




$$f_1(t) = a[1(t+a/2) - 1(t-a/2)] = Arect(0,a)$$

$$f_2(t) = \delta(t)$$

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau)\delta(t-\tau)d\tau = f_1(t) = Arect(0,A)$$




KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

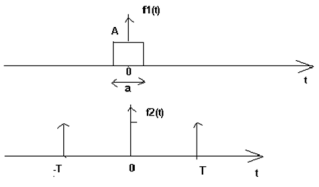
46

PROGRAM ROZWOJOWY POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

## Splot funkcji z dystrybucją delta Diraca III A

$$f(t) * \delta(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\delta(t-\tau)d\tau = f(t)$$

**Splot funkcji $f_1(t)$ będącej oknem prostokątnym o amplitudzie A usytuowanym w przedziale [T-a/2, T+a/2] oraz funkcji $f_2(t)$ - pary delt Diraca, usytuowanych w punktach -T i T:**




$$f_1(t) = Arect(0,a)$$

$$f_2(t) = \delta(t+T) + \delta(t-T)$$

**Należy wykorzystać rozdzielność splotu względem dodawania:**

$$f_1(t) * f_2(t) = f_1(t) * [\delta(t+T) + \delta(t-T)] = f_1(t) * \delta(t+T) + f_1(t) * \delta(t-T)$$

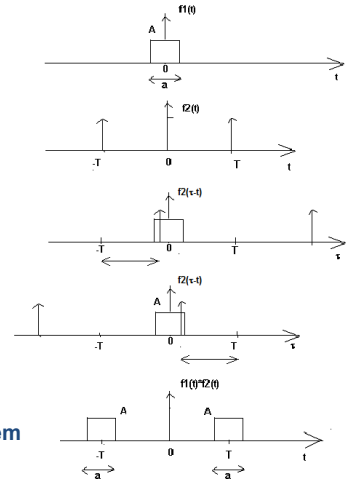
KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

47

PROGRAM ROZWOJOWY POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

## Splot funkcji z dystrybucją III B




**Splot funkcji $f_1(t)$ będącej oknem prostokątnym o amplitudzie A usytuowanym w przedziale [T-a/2, T+a/2] oraz funkcji $f_2(t)$ - pary delt Diraca, usytuowanych w punktach -T i T:**

$$f_1(t) = Arect(0,a)$$

$$f_2(t) = \delta(t+T) + \delta(t-T)$$

**Należy wykorzystać rozdzielność splotu względem dodawania:**

$$f_1(t) * f_2(t) = f_1(t) * \delta(t+T) + f_1(t) * \delta(t-T) =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau)\delta(t+T-\tau)d\tau + \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau)\delta(t-T-\tau)d\tau =$$

$$= f_1(t+T) + f_1(t-T) = Arect(-T,a) + Arect(T,a)$$

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

48

PROGRAM ROZWOJOWY POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

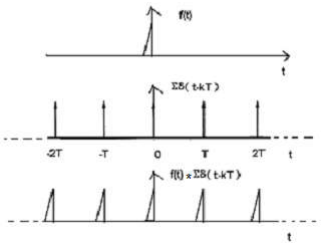
## Splot funkcji z ciągiem dystrybucji delta Diraca

$$\delta_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t-kT)$$

$$f(t) * \delta(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\delta(t-\tau)d\tau = f(t)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t-t_0) = f(t_0)$$

$$f(t) * \delta_T(t) = f(t) * \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t-kT) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(t-kT)$$




KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

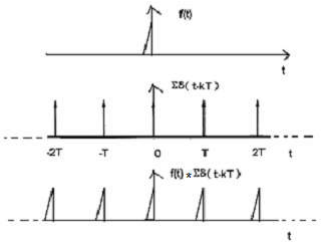
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

49

PROGRAM ROZWOJOWY POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

## Splot funkcji z ciągiem dystrybucji delta Diraca

$$f(t) * \delta_T(t) = f(t) * \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(t - kT)$$




**Narzędzie budowania sygnału okresowego - umożliwiające zwarty i wygodny w analizie (zwłaszcza w analizie widmowej) zapis formalny sygnału!!!!**

**np. okresowy przebieg prostokątny jest splotem ciągu delt Diraca o okresie równym okresowi tego przebiegu i pojedynczego okna prostokątnego o odpowiednich parametrach (amplituda, czas trwania).**

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

50

PROGRAM ROZWOJOWY POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

## Liczby zespolone

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

51

PROGRAM ROZWOJOWY POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

## Liczby zespolone

**Liczba zespolona – para uporządkowana (x,y) liczb rzeczywistych x, y∈R**

**z=(x,y) x - część rzeczywista z, y - część urojona z**

**Działania arytmetyczne na liczbach zespolonych z=(x,y), w=(u,v) :**

**Dodawanie** $z+w=(x,y)+(u,v)=(x+u,y+v)$

**Odejmowanie** $z-w=(x,y)-(u,v)=(x-u,y-v)$

**Mnożenie** $z\cdot w=(x,y)\cdot(u,v)=(xu-yv,xv+yu)$

**Dzielenie** $\frac{z}{w}=\frac{(x,y)}{(u,v)}=(\frac{xu+yv}{u^2+v^2},\frac{xv-yu}{u^2+v^2})$

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

52

PROGRAM ROZWOJOWY POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

## Liczby zespolone

**Liczba zespolona (x,0)- liczba rzeczywista x**

**Liczba zespolona (0,1) - jednostka urojona j (czasem i)**

**ponieważ** $(0,1)\cdot(0,1)=(-1,0)$

**jednostka urojona :** $j^2=-1$

**ponieważ** $z=(x,y)=(x,0)+(0,y)=(x,0)+(0,1)(0,y)$

**to** $z=(x,y)=x+jy$

**część rzeczywista:** $\mathrm{Re}(z)=x$

**część urojona:** $\mathrm{Im}(z)=y$

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

53

PROGRAM ROZWOJOWY POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

## Liczby zespolone

**Liczba sprzężona z liczbą „z”:** $z^* = (x,-y) = x - jy$

**Inne zależności**

$$z \cdot w = (x + jy) \cdot (u + jv) = (xu - yv) + j(xv + yu)$$

$$z \cdot z^* = (x, y)(x,-y) = (x + jy)(x - jy) = x^2 + y^2$$

$$\frac{z}{w} = \frac{z}{w}\frac{w^*}{w^*} = \frac{(x + jy)(u - jv)}{(u + jv)(u - jv)} = \frac{(xu + yv) + j(xv - yu)}{u^2 + v^2} = \frac{(xu + yv)}{u^2 + v^2} + j\frac{(xv - yu)}{u^2 + v^2}$$

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

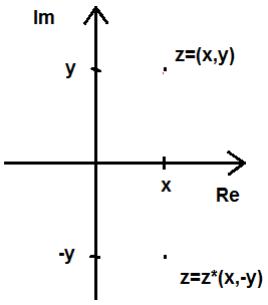
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

54

PROGRAM ROZWOJOWY POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

## Liczby zespolone

**Interpretacja graficzna:**




**Każdemu punktowi P(x,y) płaszczyzny Oxy odpowiada liczba zespolona x+jy i odwrotnie.**

**Oxy – płaszczyzna zespolona**

**Liczbom zespolonym o części urojonej równej 0 odpowiada oś Ox, Imz=0, oś rzeczywista.**

**Liczbom zespolonym o części rzeczywistej równej 0 odpowiada oś Oy, Rez=0, oś urojona.**

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

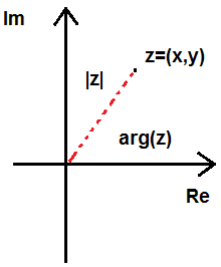
55

PROGRAM ROZWOJOWY POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

## Liczby zespolone

**moduł liczby zespolonej:** $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

**Interpretacja geometryczna – moduł jest miarą długości promienia wodzącego punktu (x,y), inaczej odległości tego punktu od początku układu.**




**argument liczby zespolonej z=x+jy<>0**

$$\cos\varphi = \frac{x}{|z|} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \qquad \sin\varphi = \frac{y}{|z|} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

**każda liczba zespolona ma nieskończenie wiele argumentów, argument należący do przedziału (-π, π] nazywamy argumentem głównym i oznaczamy arg z. Zbiór argumentów**

**Argz={argz+2kπ}.**

**Interpretacja geometryczna cd – argument jest miarą kąta, jaki tworzy wektor wodzący punktu (x,y) z osią Rez.**

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

56

PROGRAM ROZWOJOWY POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

## Liczby zespolone

### Zależności

**Jeśli $z_1, z_2 \in Z$ i $z_2 \neq 0$, to:**

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2| \qquad Arg(z_1 z_2) = Arg(z_1) + Arg(z_2)$$

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \qquad Arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = Arg(z_1) - Arg(z_2)$$

$$z z^* = |z|^2$$

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

57

PROGRAM ROZWOJOWY POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

## Liczby zespolone

**Postać trygonometryczna liczby zespolonej:**

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}(\cos\varphi + j\sin\varphi) = r(\cos\varphi + j\sin\varphi)$$

**iloczyn i iloraz dwóch liczb zespolonych w zapisie trygonometrycznym:**

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + j\sin\varphi_1) \qquad z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + j\sin\varphi_2)$$

$$z_1 z_2 = r_1 r_2[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + j\sin(\varphi_1 + \varphi_2)] \qquad \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + j\sin(\varphi_1 - \varphi_2)]$$

**wzór de Moivre'a:** $[r(\cos\varphi + j\sin\varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi + j\sin n\varphi)$

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

58

PROGRAM ROZWOJOWY POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

## Liczby zespolone

**Postać wykładnicza liczby zespolonej:** $z = \sqrt{x^2 + y^2}e^{j\varphi} = re^{j\varphi} = re^{j\arg(z)}$

$$z^* = re^{-j\varphi}$$

**iloczyn i iloraz dwóch liczb zespolonych w zapisie wykładniczym:**

$$z_1 = r_1 e^{j\varphi_1} \qquad z_2 = r_2 e^{j\varphi_2}$$

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{j(\varphi_1 + \varphi_2)} \qquad \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

**wzór de Moivre'a:** $z^n = r^n e^{jn\varphi}$ $\qquad z^{1/n} = r^{1/n} e^{j(\arg z + 2k\pi)/n}$

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

59

PROGRAM ROZWOJOWY POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

## Funkcje zespolone

### Funkcja zespolona zmiennej rzeczywistej

**Funkcja przyjmująca wartości zespolone, argument rzeczywisty**

$x \in R$, $f(x)=u(x)+jv(x)=Rez(x) + j\,Imz(x)$

### Funkcja zespolona zmiennej zespolonej

**Funkcja przyjmująca wartości zespolone, argument zespolony**

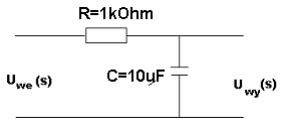
$x,y \in R$, $z=x+jy$

$f(t)=f(x+jy)=u(z)+jv(z)=u(x+jy)+jv(x+jy)=Re[f(z)] + j\,Im[f(z)]$



PROGRAM ROZWOJOWY POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

## Funkcja zespolona zmiennej zespolonej




**Przykłady:**

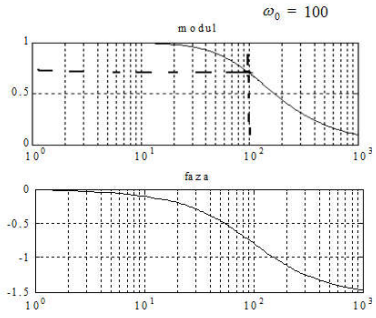
$$H(s)=\frac{\frac{1}{sC}}{R+\frac{1}{sC}}=\frac{\frac{1}{RC}}{s+\frac{1}{RC}}=\frac{\omega_0}{s+\omega_0}$$

$$s=\sigma+j\omega \rightarrow j\omega$$

$$H(j\omega)=\frac{\frac{1}{j\omega C}}{R+\frac{1}{j\omega C}}=\frac{\frac{1}{RC}}{j\omega+\frac{1}{RC}}=\frac{\omega_0}{j\omega+\omega_0}$$

$$|H(j\omega)|=\frac{\omega_0}{|j\omega+\omega_0|}=\frac{\omega_0}{\sqrt{\omega^2+\omega_0^2}}$$

$$\arg(H(j\omega))=-arctg(\frac{\omega}{\omega_0})$$



PROGRAM ROZWOJOWY POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

## Funkcja zespolona zmiennej zespolonej

### Przykład

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^{N-1} \exp(-j\omega k)$$

**Przedstawienie funkcji w postaci modułu i fazy**

$$H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})| \exp(j \arg[H(e^{j\omega})])$$

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

62

PROGRAM ROZWOJOWY POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

## Funkcja zespolona zmiennej zespolonej

### Przykład cd

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^{N-1} \exp(-j\omega k) = \sum_{k=0}^{N-1} \exp(-j\omega)^k$$

**jest to suma skończonego szeregu geometrycznego (N wyrazów) o ilorazie $e^{-j\omega}$**

$$\sum_{k=0}^{N-1} \exp(-j\omega)^k = \frac{1-e^{-j\omega N}}{1-e^{-j\omega}}$$

$$\sum_{k=0}^{N-1} \exp(-j\omega)^k = \frac{1-e^{-j\omega N}}{1-e^{-j\omega}} = \frac{e^{-j\omega N/2}(e^{j\omega N/2} - e^{-j\omega N/2})}{e^{-j\omega/2}(e^{j\omega/2} - e^{-j\omega/2})}$$

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

63

PROGRAM ROZWOJOWY POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

## Funkcja zespolona zmiennej zespolonej

### Przykład

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^{N-1} \exp(-j\omega k)$$

$$\sum_{k=0}^{N-1} \exp(-j\omega)^k = \frac{1-e^{-j\omega N}}{1-e^{-j\omega}} = \frac{e^{-j\omega N/2}(e^{j\omega N/2} - e^{-j\omega N/2})}{e^{-j\omega/2}(e^{j\omega/2} - e^{-j\omega/2})}$$

$$\frac{e^{-j\omega N/2}(e^{j\omega N/2} - e^{-j\omega N/2})}{e^{-j\omega/2}(e^{j\omega/2} - e^{-j\omega/2})} = \frac{e^{-j\omega N/2}[\cos(\omega N/2) + j\sin(\omega N/2) - [\cos(-\omega N/2) + j\sin(-\omega N/2)]]}{e^{-j\omega/2}(e^{j\omega/2} - e^{-j\omega/2})}$$

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

64

PROGRAM ROZWOJOWY POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

## Funkcja zespolona zmiennej zespolonej

### Przykład

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^{N-1} \exp(-j\omega k)$$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{e^{-j\omega N/2}[\cos(\omega N/2) + j\sin(\omega N/2) - \cos(\omega N/2) + j\sin(\omega N/2)]]}{e^{-j\omega/2}(e^{j\omega/2} - e^{-j\omega/2})} =$$

$$= \frac{2j\sin(\omega N/2)}{2j\sin(\omega/2)} e^{-j(N-1)\omega/2} = \frac{\sin(\omega N/2)}{\sin(\omega/2)} e^{-j(N-1)\omega/2} = |H(e^{j\omega})| \exp(\arg[H(e^{j\omega})])$$

$$|H(e^{j\omega})| = \left|\frac{\sin(\omega N/2)}{\sin(\omega/2)}\right| \qquad \arg(H(e^{j\omega})) = -(N-1)\omega/2$$

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

65

PROGRAM ROZWOJOWY POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

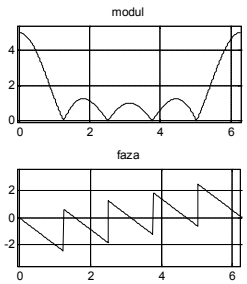
## Funkcja zespolona zmiennej zespolonej

**Przykład** $H(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^{N-1} \exp(-j\omega k)$

$$|H(e^{j\omega})| = \left|\frac{\sin(\omega N/2)}{\sin(\omega/2)}\right|$$

**jest to suma skończonego szeregu geometrycznego o ilorazie $e^{-j\omega}$**

$$H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})| \exp(\arg[H(e^{j\omega})]) = \frac{\sin(\omega N/2)}{\sin(\omega/2)} e^{-j(N-1)\omega/2}$$




$$|H(e^{j\omega})| = \left|\frac{\sin(\omega N/2)}{\sin(\omega/2)}\right|$$

$$\arg(H(e^{j\omega})) = -(N-1)\omega/2$$

$$\arg(H(e^{j\omega})) = -(N-1)\omega/2$$

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY