PROGRAM ROZWOJOWY
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

PRZETWARZANIE SYGNAŁÓW

SEMESTR V

Człowiek- najlepsza inwestycja

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską
w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

PRZETWARZANIE SYGNAŁÓW

Opiekun przedmiotu
prof. nzw. dr hab. inż. Krzysztof Kałużyński

Wykład
prof. nzw. dr hab. inż. Krzysztof Kałużyński (współautor dr inż. Krzysztof Mikołajczyk)

laboratorium
dr inż. Beata Leśniak-Plewińska (kierownik), dr inż. Szymon Cygan, dr inż. Jakub Żmigrodzki, mgr inż. Iryna Gorbenko

Uzyskiwane kompetencje

Znajomość podstawowych pojęć i metod opisu sygnałów ciągłych i dyskretnych jedno- i dwuwymiarowych, znajomość podstaw przetwarzania sygnałów i obrazów.

Umiejętność przetwarzania sygnałów z wykorzystaniem poznanych metod i narzędzi.

Zaliczenie przedmiotu

Egzamin - 70% oceny końcowej.

Wymagane uzyskanie min. 50% pkt., w tym wynik z zadania dotyczącego przekształcenia Fouriera i analizy widmowej min. 50%.

Laboratorium - 30% oceny końcowej.

Wymagane uzyskanie min. 50% pkt. z laboratorium

Liczba egzaminów – 2 w sesji zimowej, 1 w sesji poprawkowej

Informacja od dr inż. Beaty Leśniak-Plewińskiej (kierownik laboratorium)

Harmonogram ćwiczeń laboratoryjnych z PTS

L.p.	Nazwa ćwiczenia	Liczba godzin	Gr 39 Wtorek 12:15 - 13:45	Gr 35 Czwartek 12:15 - 14:45
1	Wprowadzenie do MATLAB'a	2	21.11.2017	23.11.2017
2	Analiza widmowa	2	28.11.2017	30.11.2017
3	Filtracja i korelacja sygnałów dyskretnych	2	05.12.2017	07.12.2017
4	Transformacja falkowa	2	12.12.2017	14.12.2017
5	Operacje geometryczne i arytmetyka obrazów	2	19.12.2017	21.01.2018
6	Interpolacja i histogram	2	09.01.2018	11.01.2018
7	Filtracja 2D	2	16.01.2018	18.01.2018
8	Kolokwium	1	23.01.2018	25.01.2018

dalsze informacje przez USOS lub na stronie ZIB:

zib.mchtr.pw.edu.pl

LITERATURA

1. T.P. Zieliński Cyfrowe przetwarzanie sygnałów, WKiŁ 2005
2. R.G.Lyons Wprowadzenie do cyfrowego przetwarzania sygnałów, WKiŁ 2006

3. W.Malina, M.Smiatacz Metody cyfrowego przetwarzania obrazów, Exit 2005
4. R.Tadeusiewicz, P.Korohoda Komputerowa analiza i przetwarzanie obrazów, Kraków Wydawnictwo Fundacji Postępu Telekomunikacji 1997

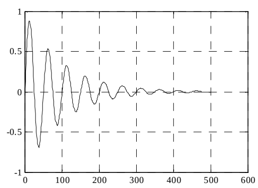
Wykład I

Wprowadzenie

Podstawy teoretyczne przetwarzania sygnałów

Sygnały

Sygnał – funkcja czasu (najczęściej) przedstawiająca przebieg parametru pewnego zjawiska, wielkości fizycznej



Przykład sygnału – stan przejściowy po udarze

Zastosowania przetwarzania sygnałów I

Telekomunikacja – usuwanie echa, kompresja, filtracja, multipleksowanie, wideokonferencje itd.

Technika militarna – echolokacja, radiolokacja, naprowadzanie pocisków, bezpieczeństwo informacji itd.

Przemysł – sterowanie, badania nieniszczące, analiza drgań, mikrogeometria powierzchni itd.

Technika samochodowa – inteligentne zawieszenia, elektroniczne sterowanie i systemy hamowania, autonomiczny pojazd, systemy nawigacyjne, kontrola ciśnienia w oponach, sterowanie działaniem poduszek, multimedia – obecnie około 50% wartości samochodu stanowi elektronika, głównie związana z przetwarzaniem sygnałów.

Zastosowania przetwarzania sygnałów II

Identyfikacja obiektów (osób)

Analiza danych rynkowych i giełdowych

AGD – „inteligentne” pralki i lodówki

Rozrywka/multimedia – kodowanie i kompresja obrazów i sygnałów, efekty specjalne

Biologia, ekologia – analiza zmian populacji zwierząt, analiza aktywności organizmów

Zastosowania przetwarzania sygnałów III

Rozpoznawanie i generacja mowy

Geologia – poszukiwanie złóż surowców, prognozowanie trzęsień ziemi (i innych zjawisk)

Badania kosmiczne – kompresja danych, analiza zdjęć pochodzących z kosmosu, analiza sygnałów pochodzących z różnych czujników umieszczonych w przestrzeni

Medycyna – obrazowanie, przetwarzanie i analiza sygnałów biomedycznych, wspomaganie słuchu, inteligentne protezy kończyn, urządzenia do wspomagania funkcji narządów, kompresja danych.

Sygnały i ich klasyfikacja

Sygnały:

deterministyczne

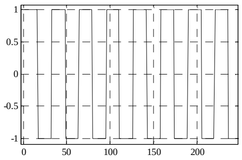
- **okresowe**
- **nieokresowe**
- **(prawie okresowe**
- **stany przejściowe)**

losowe (procesy stochastyczne)

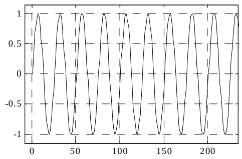
- **niestacjonarne**
- **stacjonarne**
- **ergodyczne**

Przykłady sygnałów I

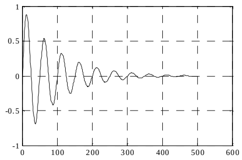
sygnały deterministyczne



Ciąg impulsów prostokątnych



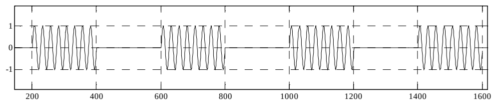
sygnał cosinusoidalny



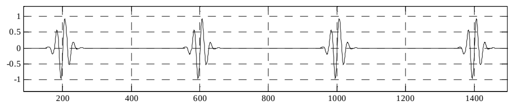
Sygnał sinusoidalny tłumiony

Przykłady sygnałów II

sygnały deterministyczne



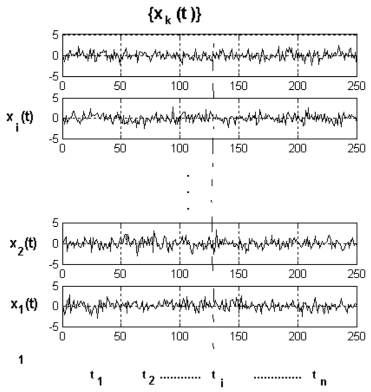
Ciąg paczek fali sinusoidalnej



Ciąg impulsów gaussowskich (pojedyncza ewolucja – sygnał sinusoidalny z obwiednią gaussowską, tzw. paczka gaussowska).

Jest to sygnał pomiarowy stosowany np. w defektoskopii

Procesy losowe (stochastyczne)



$\{x_k(t)\}$ rodzina funkcji zmiennej losowej i czasu – proces stochastyczny

$x_k(t)$ k-ta realizacja procesu - funkcja czasu dla pewnej wartości zmiennej losowej (wyniku zdarzenia losowego)

$X(t_i)$ wartości procesu dla ustalonego czasu są wartościami zmiennej losowej

Zmienna losowa – funkcja określona na zbiorze zdarzeń i przyjmująca wartości rzeczywiste (z określonym prawdopodobieństwem)

Sygnały ciągłe a sygnały dyskretne

Sygnały:

Ciągłe (czasu ciągłego, analogowe)

-przebiegi parametrów zjawisk/procesów fizycznych, obserwowane np. na ekranie oscyloskopu analogowego

-sygnał akustyczny (dźwięk)

dyskretne:

-dane giełdowe

-obserwacje aktywności organizmów żywych

-dane pomiarowe/eksperymentalne po operacji próbkowania!!!

-dane symulowane

Sygnały ciągłe a sygnały dyskretne

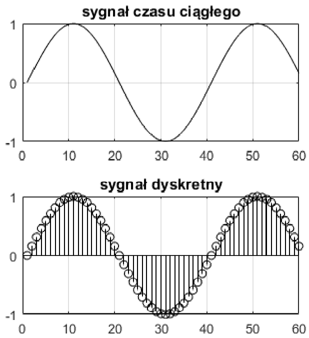
Sygnały:

ciągłe - we współczesnej technice i nauce bardzo rzadko są obiektem przetwarzania;

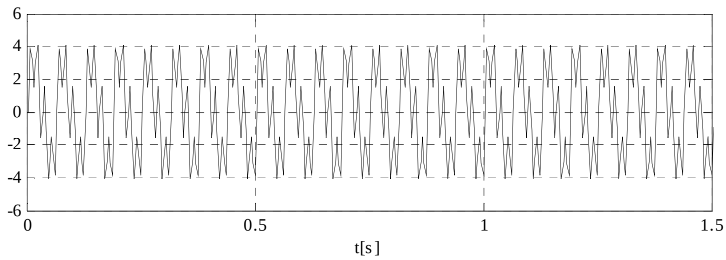
dyskretne - we współczesnej technice i nauce przetwarzanie dotyczy sygnałów dyskretnych, powstających w wyniku konwersji analogow-cyfrowej sygnałów ciągłych;

Sygnały dyskretne bywają przedstawiane jako sygnały ciągłe (łatwiejsza interpretacja);

Podstawowe narzędzia przetwarzania sygnałów omawiane są w dziedzinie czasu ciągłego.



Sygnał I - przebieg czasowy

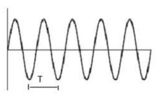


Powyższy sygnał jest kombinacją liniową kilku składowych okresowych (sinusoidalnych). Jakie są amplitudy i częstoliwości tych składowych??

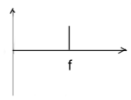
Odpowiedź na to pytanie na podstawie przebiegu czasowego jest trudna, konieczny jest inny sposób analizy sygnału.

Wykorzystuje związek między okresem a częstotliwością.

Dziedzina czasu – dziedzina częstotliwości



$$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega}$$

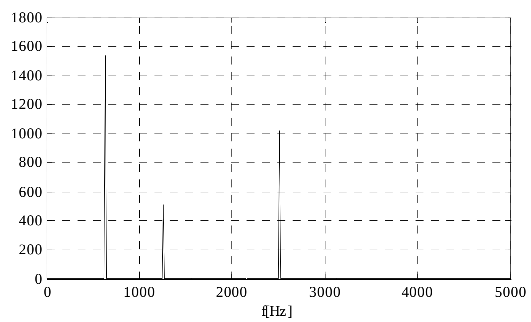


Sygnał okresowy **związek okres-częstotliwość** **widmo sygnału**

T – okres, f – częstotliwość, ω – pulsacja (częstotliwość kołowa)

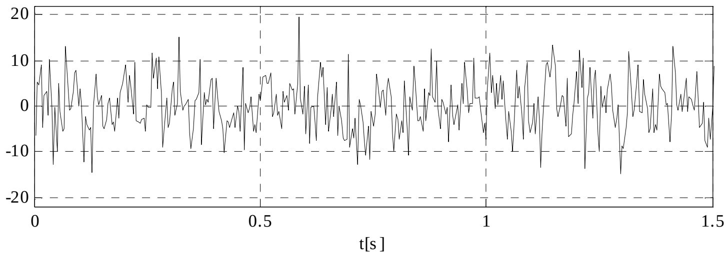
Analiza sygnału w dziedzinie częstotliwości – analiza widmowa!!

Sygnał I - wynik analizy widmowej



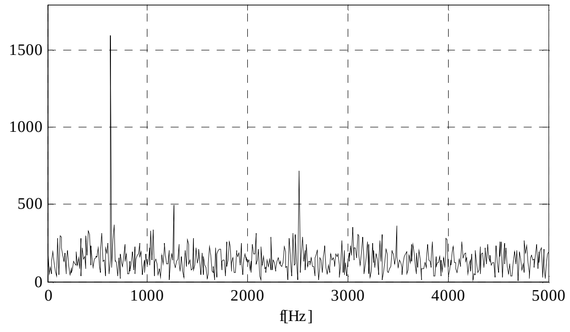
Sygnał zawiera 3 składowe o różnych amplitudach i częstotliwościach

Sygnał II - przebieg czasowy



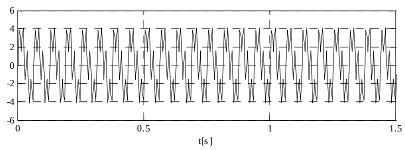
Jakie są składowe sygnału??

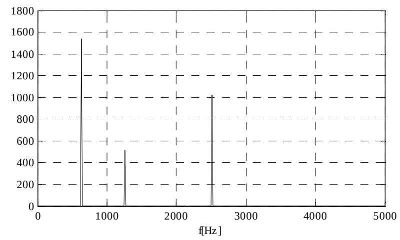
Sygnał II - wynik analizy widmowej

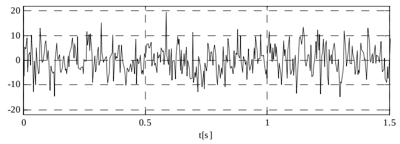


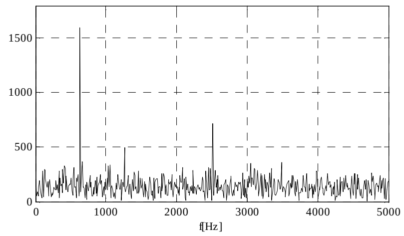
Sygnał zawiera 3 składowe o różnych amplitudach i częstotliwościach oraz szum

Porównanie przedstawienia sygnału I i II w dziedzinie czasu i częstotliwości

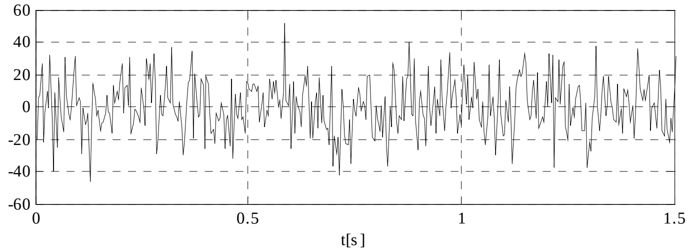


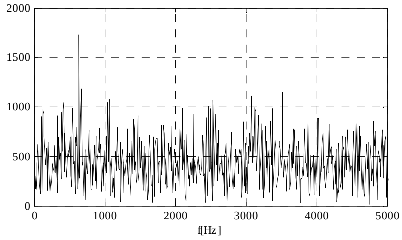






Sygnał III - przebieg czasowy i wynik analizy widmowej

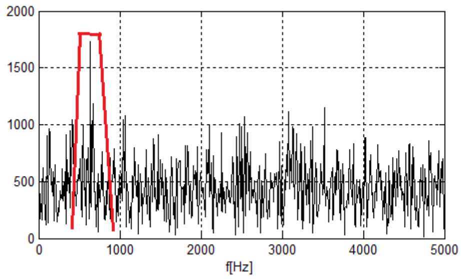




Sygnał zawiera 1 składową sinusoidalną oraz szum o dużej amplitudzie w stosunku do amplitudy składowej sinusoidalnej.

TRUDNA INTERPRETACJA !!

Sygnał III - wynik analizy widmowej



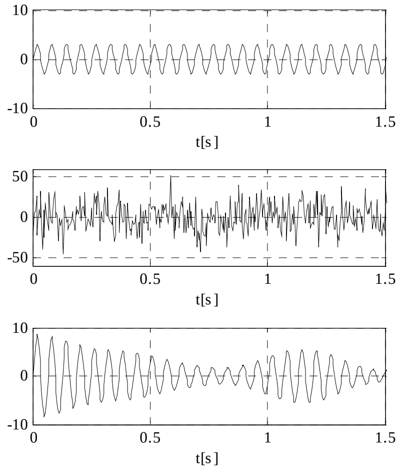
Sygnał zawiera 1 składową sinusoidalną oraz szum o dużej amplitudzie w stosunku do amplitudy składowej sinusoidalnej.

TRUDNA INTERPRETACJA !!

Powyżej zaproponowano ograniczenie zakresu częstotliwości sygnału, tak, aby zachować interesującą nas składową sinusoidalną. Ograniczenia takie realizowane jest przy pomocy filtracji (układ elektroniczny, algorytm - filtracja cyfrowa).

Czerwony trapez ogranicza zbiór składowych częstotliwościowych, które pozostaną w sygnale po filtracji.

Sygnał III - etapy



Składowa sinusoidalna

Składowa sinusoidalna z szumem

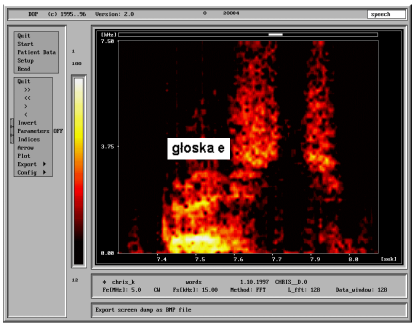
Wynik filtracji składowej sinusoidalnej z szumem

Zastosowania przetwarzania sygnałów - przykłady

Prezentacja czasowo-częstotliwościowa sygnału mowy – „treść" - rozkład mocy sygnału na płaszczyźnie czas-częstotliwość. Widoczne tzw. formanty głoski "e".

czas →

↑ częstotliwość



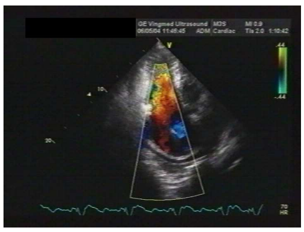
czas →

Zastosowania przetwarzania sygnałów - przykłady

Obrazy i sygnały biomedyczne

Ultrasonografia

Wizualizacja struktur oraz rozkładu prędkości przepływu krwi



Dane prezentowane na obrazach USG (obrazy - sygnały 2D) często są wynikiem przetwarzania ech (sygnałów 1D).

Podstawy teoretyczne

przetwarzania sygnałów

Wartość średnia, energia, moc sygnału

Wartość średnia, energia, moc

Podstawowe parametry sygnałów to wartość średnia, energia i moc, zdefiniowane poniższymi zależnościami:

wartość średnia sygnału w przedziale [t_1,t_2]:

$$E[x] = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} x(t)dt$$

w przypadku sygnału o nieskończonym czasie trwania wartość średnia jest następującą wielkością graniczną:

$$E[x] = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x(t)dt$$

jeśli sygnał jest okresowy o okresie T_o

$$E[x] = \frac{1}{T_o}\int_{t_o}^{t_o+T} x(t)dt$$

Wartość średnia, energia, moc

Energia sygnału

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t)dt$$

moc

$$P_x = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x^2(t)dt$$

w przypadku sygnału okresowego moc:

$$P_x = \frac{1}{T_o}\int_{t_o}^{t_o+T} x^2(t)dt$$

Kolejny parametr sygnału stanowi jego wartość skuteczna, równa pierwiastkowi kwadratowemu z mocy sygnału.

Energia i moc - klasyfikacja sygnałów

Sygnały – ze względu na właściwości zdefiniowanych powyżej wielkości można podzielić na sygnały o ograniczonej energii, jeśli $E_x<\infty$, oraz sygnały o skończonej mocy, jeśli $P_x<\infty$.

Moc sygnałów o ograniczonej energii jest równa 0, zaś energia sygnałów o skończonej mocy jest nieskończona.

Tak więc możemy mieć do czynienia z sygnałami o ograniczonej energii i skończonym czasie trwania, sygnałami o ograniczonej energii i nieskończonym czasie trwania, sygnałami nieokresowymi o ograniczonej mocy (np. sygnał stały) oraz z sygnałami okresowymi o ograniczonej mocy.

Uwaga - sygnały spróbkowane - jako skończone zbiory próbek, możemy traktować zarówno jak sygnały o skończonym czasie trwania, jak i sygnały okresowe, których przedłużeniem okresowym jest właśnie spróbkowany sygnał.

Splot funkcji

Splot dwóch funkcji

Definicja

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau$$

Właściwości splotu

Przemienność

$$f_1(t) * f_2(t) = f_2(t) * f_1(t)$$

Rozdzielność względem dodawania

$$f_1(t) * [f_2(t) + f_3(t)] = f_1(t) * f_2(t) + f_1(t) * f_3(t)$$

Łączność

$$f_1(t) * [f_2(t) * f_3(t)] = [f_1(t) * f_2(t)] * f_3(t)$$

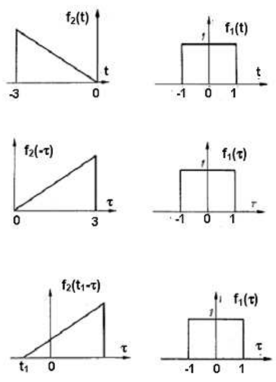
Splot dwóch funkcji

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau$$

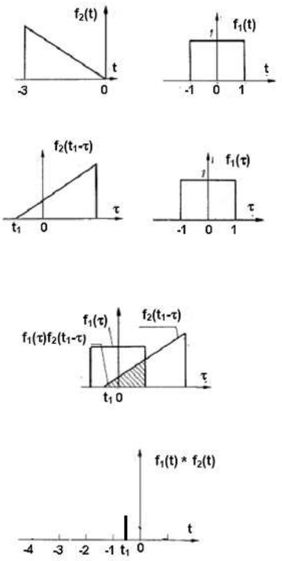
Przykład

odwrócenie $f_2(t)$ i zmiana argumentu osi czasu!!!

przesunięcie $f_2(t)$ o t_1



Splot dwóch funkcji



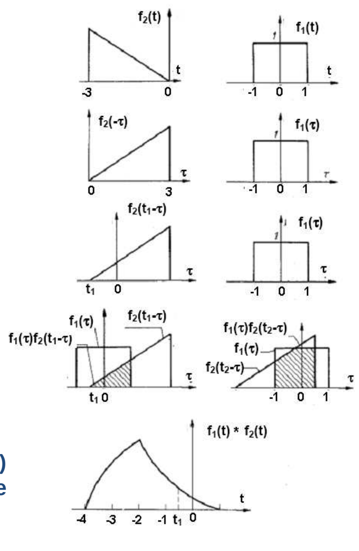
Przykład

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau$$

Wyznaczenie całki z iloczynu $f_1(t)$ i $f_2(t-t_1)$ - czyli zakreskowanego pola

otrzymujemy wartość splotu dla $t = t_1$

Splot dwóch funkcji

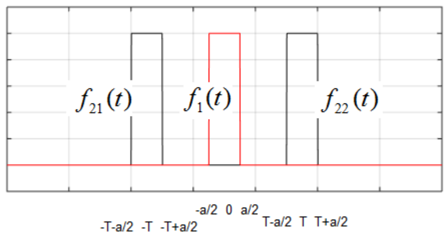


Przykład

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau$$

Wyznaczenie całki z iloczynu $f_1(t)$ i $f_2(t-t_1)$ dla t_1 przebiegających zbiór [-4,1] daje niezerowe wartości splotu.

Splot dwóch funkcji (okien) prostokątnych

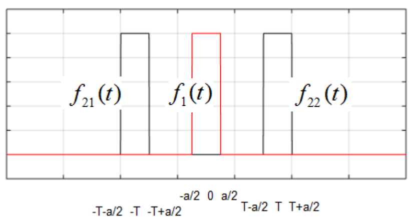


$$f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau$$

$$f_2(t) = f_{21}(t) + f_{22}(t)$$

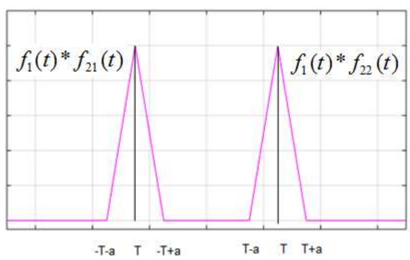
$$f_1(t) * [f_{21}(t) + f_{22}(t)] = f_1(t) * f_{21}(t) + f_1(t) * f_{22}(t)$$

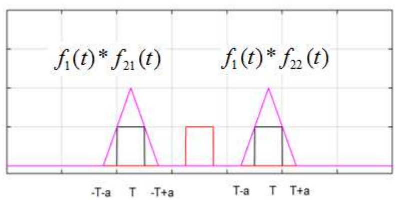
Splot dwóch funkcji (okien) prostokątnych



$$f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau$$

$$f_2(t) = f_{21}(t) + f_{22}(t)$$



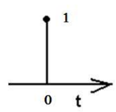


Dystrybucja delta Diraca

Dystrybucja delta Diraca I

Definicja i właściwości dystrybucji

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) = 1$$



$$\delta(t) = 0 \qquad dla \qquad t \neq 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t - t_0) = f(t_0)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t) = f(0)$$

Dystrybucja delta Diraca I

Definicje graniczne dystrybucji:

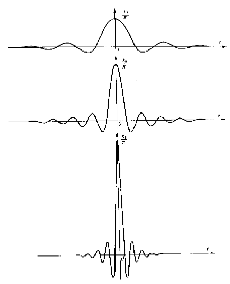
ciąg funkcji prostokątnych: $\delta(t)=\lim_{\tau\to 0}\frac{1}{\tau}[1(t+\tau/2)-1(t-\tau/2)]$ **gdzie 1(t) - skok jednostkowy**

ciąg funkcji trójkątnych: $\delta(t)=\lim_{\tau\to 0}\frac{2}{\tau}[1-\frac{|t|}{\tau}]$ **dla |t|<τ, 0 poza tym przedziałem;**

ciąg funkcji sin(x)/x=sinc(x): $\delta(t)=\lim_{k\to\infty}\frac{k}{\pi}\mathrm{sinc}(kt)$

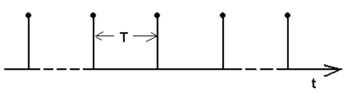
Dystrybucja delta Diraca II

Dystrybucja jako granica ciągu sinc:



$$\delta(t)=\lim_{k\to\infty}\frac{k}{\pi}\mathrm{sinc}(kt)$$

Ciąg dystrybucji : $\delta_T(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(t-kT)$



Splot funkcji z dystrybucją delta Diraca I

Właściwości dystrybucji Diraca:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t-t_0) = f(t_0)$$

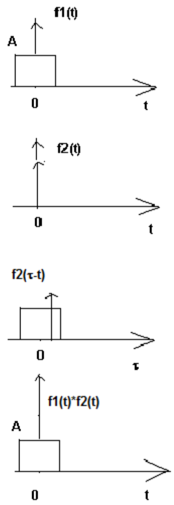
$$f(t) * \delta(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\delta(t-\tau)d\tau = f(t)$$

Splot funkcji $f_1(t)$ będącej oknem prostokątnym o amplitudzie A i czasie trwania a usytuowanym w początku układu Arect(0,a) oraz funkcji $f_2(t)$ - delty Diraca, usytuowanej w początku układu:

$$f_1(t) = a[1(t + a/2) - 1(t - a/2)] = Arect(0,a)$$

$$f_2(t) = \delta(t)$$

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau)\delta(t-\tau)d\tau = f_1(t) = Arect(0, A)$$



Splot funkcji z dystrybucją delta Diraca II

Właściwości dystrybucji Diraca:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t-t_0) = f(t_0)$$

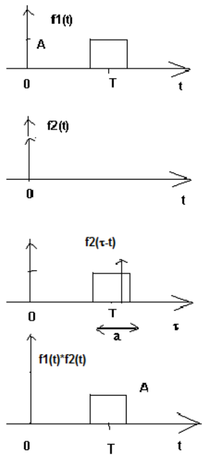
$$f(t) * \delta(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\delta(t-\tau)d\tau = f(t)$$

Splot funkcji $f_1(t)$ będącej oknem prostokątnym o amplitudzie A usytuowanym w przedziale [T-a/2, T+a/2] oraz funkcji $f_2(t)$ - delty Diraca, usytuowanej w początku układu:

$$f_1(t) = Arect(-T, a)$$

$$f_2(t) = \delta(t)$$

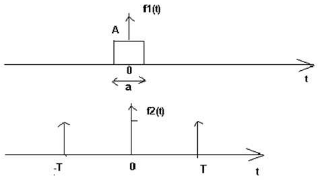
$$f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau)\delta(t-\tau)d\tau = f_1(t) = Arect(T, a)$$



Splot funkcji z dystrybucją delta Diraca III A

$$f(t)*\delta(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\delta(t-\tau)d\tau = f(t)$$

Splot funkcji $f_1(t)$ będącej oknem prostokątnym o amplitudzie A usytuowanym w przedziale [T-a/2, T+a/2] oraz funkcji $f_2(t)$ - pary delt Diraca, usytuowanych w punktach -T i T:



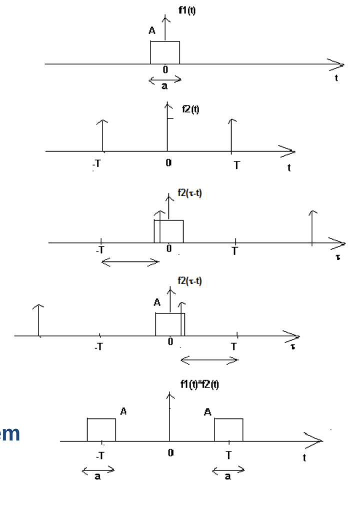
$$f_1(t)=Arect(0,a)$$

$$f_2(t)=\delta(t+T)+\delta(t-T)$$

Należy wykorzystać rozdzielność splotu względem dodawania:

$$f_1(t)*f_2(t)=f_1(t)*[\delta(t+T)+\delta(t-T)]=f_1(t)*\delta(t+T)+f_1(t)*\delta(t-T)$$

Splot funkcji z dystrybucją III B



Splot funkcji $f_1(t)$ będącej oknem prostokątnym o amplitudzie A usytuowanym w przedziale [T-a/2, T+a/2] oraz funkcji $f_2(t)$ - pary delt Diraca, usytuowanych w punktach -T i T:

$$f_1(t)=Arect(0,a)$$

$$f_2(t)=\delta(t+T)+\delta(t-T)$$

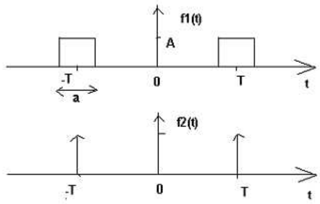
Należy wykorzystać rozdzielność splotu względem dodawania:

$$f_1(t)*f_2(t)=f_1(t)*\delta(t+T)+f_1(t)*\delta(t-T)=$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau)\delta(t+T-\tau)d\tau+\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau)\delta(t-T-\tau)d\tau=$$

$$=f_1(t+T)+f_1(t-T)=Arect(-T,a)+Arect(T,a)$$

Splot funkcji z dystrybucją Diraca IV A



Splot funkcji $f_1(t)$ będącej sumą dwóch okien prostokątnych o amplitudzie A usytuowanych w przedziałach [-T-a/2, -T+a/2] oraz [T-a/2, T+a/2] oraz funkcji $f_1(t)$ - sumy dwóch delt Diraca o amplitudach k, usytuowanych w punktach -T i T. Mamy

$$f_1(t) = Arect(-T,a) + Arect(T,a)$$

$$f_2(t) = \delta(t+T) + \delta(t-T)$$

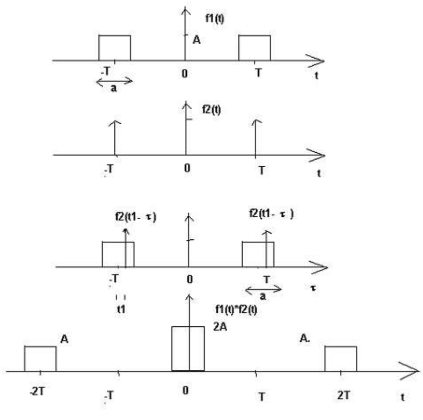
gdzie Arect(t,a) oznacza okno prostokątne usytuowane w punkcie t, o szerokości (czasie trwania) a oraz amplitudzie A

??????

Należy wykorzystać rozdzielność splotu względem dodawania

Splot funkcji z dystrybucją delta Diraca IV B

Splot funkcji $f_1(t)$ będącej sumą dwóch okien prostokątnych oraz [T-a/2, T+a/2] oraz sumy dwóch delt Diraca o amplitudach k, usytuowanych w punktach -T i T. Mamy



$$f_1(t) = Arect(-T,a) + Arect(T,a)$$

$$f_2(t) = \delta(t+T) + \delta(t-T)$$

$$f_1(t) * f_2(t) = [Arect(-T,a) + Arect(T,a)] * [\delta(t+T) + \delta(t-T)] =$$

$$= [Arect(-T,a) + Arect(T,a)] * \delta(t+T) + [Arect(-T,a) + Arect(T,a)] * \delta(t-T) =$$

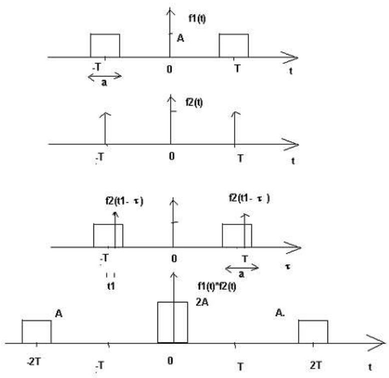
$$= Arect(-T,a) * \delta(t+T) + Arect(T,a) * \delta(t+T) + Arect(-T,a)\delta(t-T) + Arect(T,a)\delta(t-T)$$

Splot funkcji z dystrybucją delta Diraca IV C

Mamy

$$f_1(t) = Arect(-T,a) + Arect(T,a)$$

$$f_2(t) = \delta(t+T) + \delta(t-T)$$



$$f_1(t) * f_2(t) = Arect(-T,a) * \delta(t+T) + Arect(T,a) * \delta(t+T) + Arect(-T,a)\delta(t-T) + Arect(T,a)\delta(t-T) =$$

$$= Arect(-2T,a) + 2Arect(0,a) + Arect(2T,a)$$

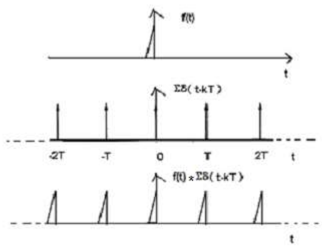
Splot funkcji z ciągiem dystrybucji delta Diraca

$$\delta_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t-kT)$$

$$f(t) * \delta(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\delta(t-\tau)d\tau = f(t)$$

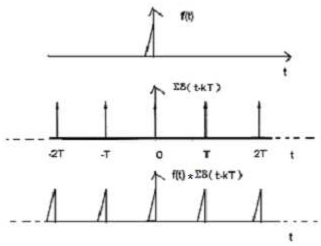
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t-t_0) = f(t_0)$$

$$f(t) * \delta_T(t) = f(t) * \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t-kT) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(t-kT)$$



Splot funkcji z ciągiem dystrybucji delta Diraca

$$f(t)*\delta_T(t) = f(t)*\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(t-kT) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(t-kT)$$



Narzędzie budowania sygnału okresowego - umożliwiające zwarty i wygodny w analizie (zwłaszcza w analizie widmowej) zapis formalny sygnału!!!!

np. okresowy przebieg prostokątny jest splotem ciągu delt Diraca o okresie równym okresowi tego przebiegu i pojedynczego okna prostokątnego o odpowiednich parametrach (amplituda, czas trwania).

Liczby zespolone

Liczby zespolone

Liczba zespolona – para uporządkowana (x,y) liczb rzeczywistych x, y$\in$R

z=(x,y)   x - część rzeczywista z, y - część urojona z

Działania arytmetyczne na liczbach zespolonych z=(x,y), w=(u,v) :

Dodawanie $z+w=(x,y)+(u,v)=(x+u,y+v)$

Odejmowanie $z-w=(x,y)-(u,v)=(x-u,y-v)$

Mnożenie $z\cdot w=(x,y)\cdot(u,v)=(xu-yv,xv+yu)$

Dzielenie $\frac{z}{w}=\frac{(x,y)}{(u,v)}=(\frac{xu+yv}{u^2+v^2},\frac{xv-yu}{u^2+v^2})$

Liczby zespolone

Liczba zespolona (x,0)- liczba rzeczywista x

Liczba zespolona (0,1) - jednostka urojona j (czasem i)

ponieważ $(0,1)\cdot(0,1)=(-1,0)$

jednostka urojona : $j^2=-1$

ponieważ $z=(x,y)=(x,0)+(0,y)=(x,0)+(0,1)(0,y)$

to $z=(x,y)=x+jy$

część rzeczywista: $\mathrm{Re}(z)=x$

część urojona: $\mathrm{Im}(z)=y$

Liczby zespolone

Liczba sprzężona z liczbą „z”: $z^* = (x,-y) = x - jy$

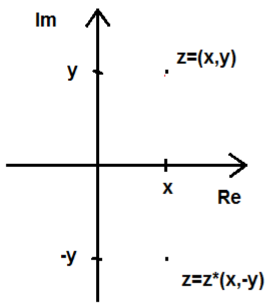
Inne zależności

$$z \cdot w = (x + jy) \cdot (u + jv) = (xu - yv) + j(xv + yu)$$

$$z \cdot z^* = (x, y)(x,-y) = (x + jy)(x - jy) = x^2 + y^2$$

$$\frac{z}{w} = \frac{z}{w}\frac{w^*}{w^*} = \frac{(x + jy)(u - jv)}{(u + jv)(u - jv)} = \frac{(xu + yv) + j(xv - yu)}{u^2 + v^2} = \frac{(xu + yv)}{u^2 + v^2} + j\frac{(xv - yu)}{u^2 + v^2}$$

Liczby zespolone



Interpretacja graficzna:

Każdemu punktowi P(x,y) płaszczyzny Oxy odpowiada liczba zespolona x+jy i odwrotnie.

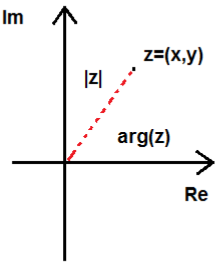
Oxy – płaszczyzna zespolona

Liczbom zespolonym o części urojonej równej 0 odpowiada oś Ox, Imz=0, oś rzeczywista.

Liczbom zespolonym o części rzeczywistej równej 0 odpowiada oś Oy, Rez=0, oś urojona.

Liczby zespolone

moduł liczby zespolonej: $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$



Interpretacja geometryczna – moduł jest miarą długości promienia wodzącego punktu (x,y), inaczej odległości tego punktu od początku układu.

argument liczby zespolonej z=x+jy<>0

$$\cos\varphi = \frac{x}{|z|} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad \sin\varphi = \frac{y}{|z|} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

każda liczba zespolona ma nieskończenie wiele argumentów, argument należący do przedziału (-π, π] nazywamy argumentem głównym i oznaczamy arg z. Zbiór argumentów

Argz={argz+2kπ}.

Interpretacja geometryczna cd – argument jest miarą kąta, jaki tworzy wektor wodzący punktu (x,y) z osią Rez.

Liczby zespolone

Zależności

Jeśli z_1, $z_2 \in Z$ i $z_2 \neq 0$, to:

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2| \qquad Arg(z_1 z_2) = Arg(z_1) + Arg(z_2)$$

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \qquad Arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = Arg(z_1) - Arg(z_2)$$

$$zz^* = |z|^2$$

Liczby zespolone

Postać trygonometryczna liczby zespolonej:

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}(\cos\varphi + j\sin\varphi) = r(\cos\varphi + j\sin\varphi)$$

iloczyn i iloraz dwóch liczb zespolonych w zapisie trygonometrycznym:

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + j\sin\varphi_1) \qquad z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + j\sin\varphi_2)$$

$$|z_1 z_2| = r_1 r_2[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + j\sin(\varphi_1 + \varphi_2)] \qquad \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \left|\frac{r_1}{r_2}\right|[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + j\sin(\varphi_1 - \varphi_2)$$

wzór de Moivre'a: $(\cos\varphi + j\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + j\sin n\varphi$

Liczby zespolone

Postać wykładnicza liczby zespolonej: $z = \sqrt{x^2 + y^2}\, e^{j\varphi} = re^{j\varphi} = re^{j\arg(z)}$

iloczyn i iloraz dwóch liczb zespolonych w zapisie wykładniczym:

$$z_1 = r_1 e^{j\varphi_1} \qquad z_2 = r_2 e^{j\varphi_2}$$

$$|z_1 z_2| = r_1 r_2 e^{j(\varphi_1 + \varphi_2)} \qquad \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \left|\frac{r_1}{r_2}\right| e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

wzór de Moivre'a: $z^n = r^n e^{jn\varphi}$

$$z^* = re^{-j\varphi} \qquad z^{1/n} = r^{1/n} e^{j(\arg z + 2k\pi)/n}$$

Funkcje zespolone

Funkcja zespolona zmiennej rzeczywistej

Funkcja przyjmująca wartości zespolone, argument rzeczywisty

$x \in R$, f(x)=u(x)+jv(x)=Rez(x) + j Imz(x)

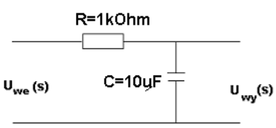
Funkcja zespolona zmiennej zespolonej

Funkcja przyjmująca wartości zespolone, argument zespolony

$x,y \in R$, z=x+jy

f(t)=f(x+jy)=u(z)+jv(z)=u(x+jy)+jv(x+jy)=Re[f(z)] + j Im[f(z)]

Funkcja zespolona zmiennej zespolonej



Przykłady:

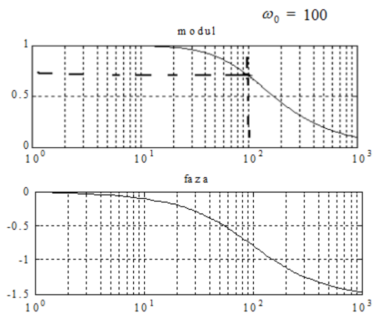
$$H(s)=\frac{\frac{1}{sC}}{R+\frac{1}{sC}}=\frac{\frac{1}{RC}}{s+\frac{1}{RC}}=\frac{\omega_0}{s+\omega_0}$$

$$s=\sigma+j\omega\rightarrow j\omega$$

$$H(j\omega)=\frac{\frac{1}{j\omega C}}{R+\frac{1}{j\omega C}}=\frac{\frac{1}{RC}}{j\omega+\frac{1}{RC}}=\frac{\omega_0}{j\omega+\omega_0}$$

$$|H(j\omega)|=\frac{\omega_0}{|j\omega+\omega_0|}=\frac{\omega_0}{\sqrt{\omega^2+\omega_0^2}}$$

$$\arg(H(j\omega))=-arctg(\frac{\omega}{\omega_0})$$



Funkcja zespolona zmiennej zespolonej

Przykład

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^{N-1} \exp(-j\omega k)$$

Przedstawienie funkcji w postaci modułu i fazy

$$H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})| \exp(j \arg[H(e^{j\omega})])$$

Funkcja zespolona zmiennej zespolonej

Przykład cd

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^{N-1} \exp(-j\omega k) = \sum_{k=0}^{N-1} \exp(-j\omega)^k$$

jest to suma skończonego szeregu geometrycznego (N wyrazów) o ilorazie $e^{-j\omega}$

$$\sum_{k=0}^{N-1} \exp(-j\omega)^k = \frac{1-e^{-j\omega N}}{1-e^{-j\omega}}$$

$$\sum_{k=0}^{N-1} \exp(-j\omega)^k = \frac{1-e^{-j\omega N}}{1-e^{-j\omega}} = \frac{e^{-j\omega N/2}(e^{j\omega N/2} - e^{-j\omega N/2})}{e^{-j\omega/2}(e^{j\omega/2} - e^{-j\omega/2})}$$

Funkcja zespolona zmiennej zespolonej

Przykład

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^{N-1} \exp(-j\omega k)$$

$$\sum_{k=0}^{N-1} \exp(-j\omega)^k = \frac{1-e^{-j\omega N}}{1-e^{-j\omega}} = \frac{e^{-j\omega N/2}(e^{j\omega N/2} - e^{-j\omega N/2})}{e^{-j\omega/2}(e^{j\omega/2} - e^{-j\omega/2})}$$

$$\frac{e^{-j\omega N/2}(e^{j\omega N/2} - e^{-j\omega N/2})}{e^{-j\omega/2}(e^{j\omega/2} - e^{-j\omega/2})} = \frac{e^{-j\omega N/2}[\cos(\omega N/2) + j\sin(\omega N/2) - [\cos(-\omega N/2) + j\sin(-\omega N/2)]]}{e^{-j\omega/2}(e^{j\omega/2} - e^{-j\omega/2})}$$

Funkcja zespolona zmiennej zespolonej

Przykład

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^{N-1} \exp(-j\omega k)$$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{e^{-j\omega N/2}[\cos(\omega N/2) + j\sin(\omega N/2) - \cos(\omega N/2) + j\sin(\omega N/2)]]}{e^{-j\omega/2}(e^{j\omega/2} - e^{-j\omega/2})} =$$

$$= \frac{2j\sin(\omega N/2)}{2j\sin(\omega/2)} e^{-j(N-1)\omega/2} = \frac{\sin(\omega N/2)}{\sin(\omega/2)} e^{-j(N-1)\omega/2} = |H(e^{j\omega})| \exp(\arg[H(e^{j\omega})])$$

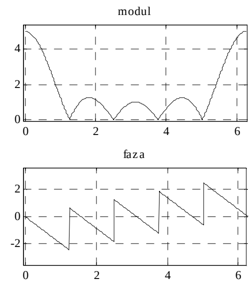
$$|H(e^{j\omega})| = \left| \frac{\sin(\omega N/2)}{\sin(\omega/2)} \right| \qquad \arg(H(e^{j\omega})) = -(N-1)\omega/2$$

Funkcja zespolona zmiennej zespolonej

Przykład $$H(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^{N-1} \exp(-j\omega k)$$

$$|H(e^{j\omega})| = \left| \frac{\sin(\omega N/2)}{\sin(\omega/2)} \right|$$

jest to suma skończonego szeregu geometrycznego o ilorazie $e^{-j\omega}$



$$H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})| \exp(\arg[H(e^{j\omega})]) = \frac{\sin(\omega N/2)}{\sin(\omega/2)} e^{-j(N-1)\omega/2}$$

$$|H(e^{j\omega})| = \left| \frac{\sin(\omega N/2)}{\sin(\omega/2)} \right|$$

$$\arg(H(e^{j\omega})) = -(N-1)\omega/2$$

$$\arg(H(e^{j\omega})) = -(N-1)\omega/2$$