

PRZETWARZANIE SYGNAŁÓW

SEMESTR V

Człowiek - najlepsza inwestycja



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



*Projekt współfinansowany przez Unię Europejską
w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego*

Wykład II

Wprowadzenie

Podstawy teoretyczne przetwarzania sygnałów



Szereg Fouriera

i

przekształcenie Fouriera



Jean Baptiste Joseph Fourier

21.03.1768 – 16.05.1830

1822 – stwierdził, że pewne funkcje można przedstawić w postaci nieskończonej sumy harmonicznych

teoria transmisji ciepła, teoria drgań, efekt szklarniowy, prace nad liczbą rozwiązań równań algebraicznych

sekretarz Akademii Francuskiej, członek Królewskiej Szwedzkiej Akademii Nauk



Trygonometryczny szereg Fouriera

**$f(t)$ – okresowa, okres T , spełnia warunki Dirichleta;
rozwińcie $f(t)$ w szereg trygonometryczny Fouriera:**

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)]$$

$$T = 2\pi/\omega_0, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

współczynniki rozwinięcia:

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(n\omega_0 t) dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin(n\omega_0 t) dt$$

Wykładniczy szereg Fouriera

rozwińnięcie $f(t)$ w szereg wykładniczy Fouriera:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} F_n \exp(jn\omega_0 t)$$

współczynniki rozwinięcia

$$F_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \exp(-jn\omega_0 t) dt$$

$$F_n = |F_n| e^{j\arg(F_n)}$$

$\{|F_n|\}$ - widmo amplitudowe, $\{\arg(F_n)\}$ - widmo fazowe

$\{|F_n|^2\}$ - widmo mocy sygnału $f(t)$

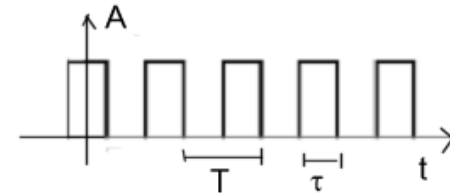
Związek między współczynnikami rozwinięcia w szereg wykładniczy i w szereg trygonometryczny dla $n \geq 1$:

$$F_n = \frac{a_n - jb_n}{2}$$

$$F_{-n} = \frac{a_n + jb_n}{2}$$

Przykłady rozwinięć w SF I A

$\text{rect}_T(t)$ - ciąg impulsów prostokątnych o współczynniku wypełnienia τ/T



współczynniki rozwinięcia:

$$T=2\pi/\omega_0$$

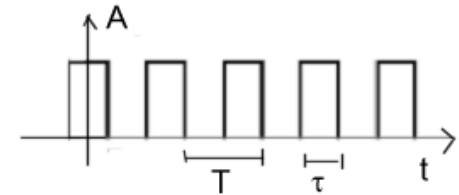
$$F_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \text{rect}_T(t) \exp(-jn\omega_0 t) dt = \frac{1}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} A \exp(-jn\omega_0 t) dt = \frac{A}{-jn\omega_0 T} \exp(-jn\omega_0 t) \Big|_{-\tau/2}^{\tau/2}$$

$$F_n = \frac{A}{-jn\omega_0 T} \exp(-jn\omega_0 t) \Big|_{-\tau/2}^{\tau/2} = \frac{A}{-jn\omega_0 T} [\exp(-jn\omega_0 \tau / 2) - \exp(jn\omega_0 \tau / 2)] =$$

$$= \frac{A}{-jn\omega_0 T} [\cos(-n\omega_0 \tau / 2) + j \sin(-n\omega_0 \tau / 2) - \cos(n\omega_0 \tau / 2) - j \sin(-n\omega_0 \tau / 2)]$$

Przykłady rozwinięć w SF I B

$\text{rect}_T(t)$ - ciąg impulsów prostokątnych o współczynniku wypełnienia τ/T



współczynniki rozwinięcia:

$$T=2\pi/\omega_0$$

$$F_n = \frac{A}{-jn\omega_0 T} [\cos(-n\omega_0\tau/2) + j\sin(-n\omega_0\tau/2) - \cos(n\omega_0\tau/2) - j\sin(-n\omega_0\tau/2)] =$$

$$= \frac{A}{jn\omega_0 T} 2j\sin(n\omega_0\tau/2) = \frac{A}{T} \frac{\sin(n\omega_0\tau/2)}{n\omega_0/2} = \frac{A\tau}{T} \frac{\sin(n\omega_0\tau/2)}{n\omega_0\tau/2} = \frac{A\tau}{T} \text{sinc}\left(\frac{n\omega_0\tau}{2}\right)$$

$$F_n = \frac{2A}{n\omega_0 T} \sin(n\omega_0\tau/2) = \frac{A}{n\pi} \sin(n2\pi\tau/T)$$

$$F_n = \frac{A\tau}{T} \text{sinc}\left(\frac{n\omega_0\tau}{2}\right)$$

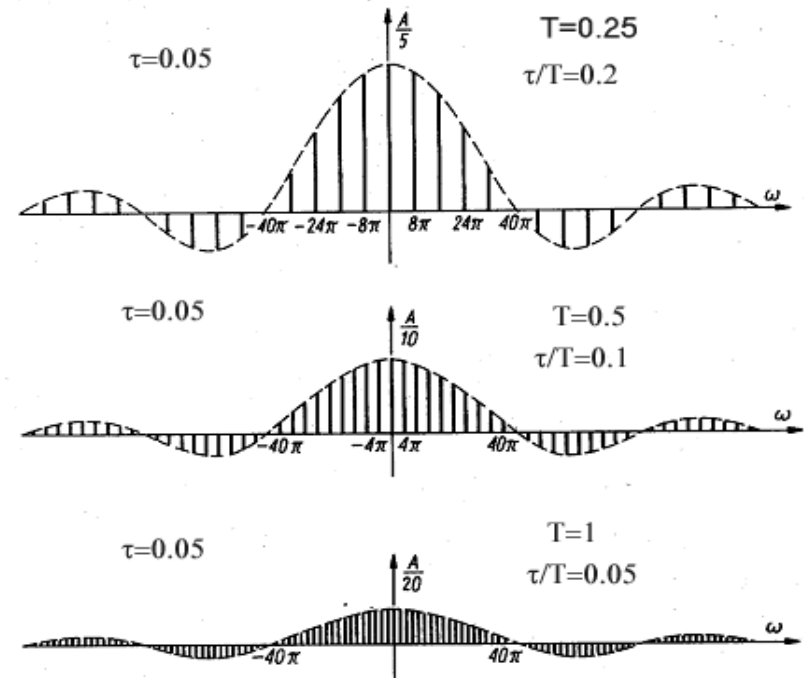
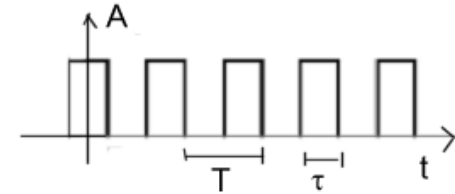
Przykłady rozwinięć w SF I C

$\text{rect}_T(t)$ - ciąg impulsów prostokątnych o współczynniku wypełnienia τ/T

współczynniki rozwinięcia:

$$F_n = \frac{A\tau}{T} \text{sinc}\left(\frac{n\omega_0\tau}{2}\right)$$

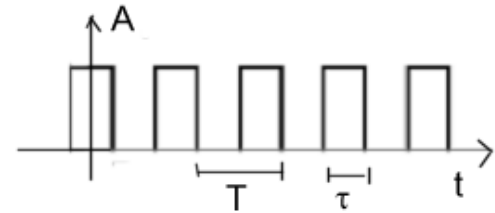
$$T = 2\pi/\omega_0$$



przebiegi współczynników rozwinięcia dla różnych wartości T i ustalonej wartości τ .

Przykłady rozwinięć w SF I D

$\text{rect}_T(t)$ - ciąg impulsów prostokątnych o współczynniku wypełnienia τ/T :



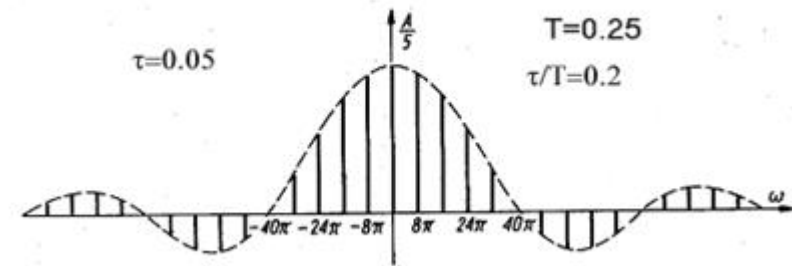
$$T = 2\pi/\omega_0$$

współczynniki rozwinięcia:

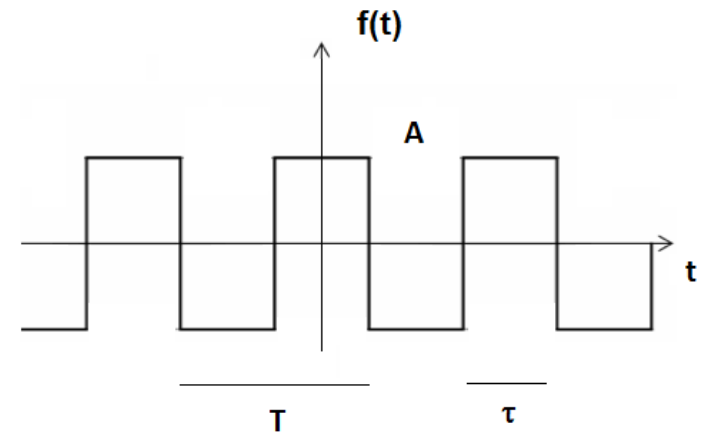
$$F_n = \frac{A\tau}{T} \text{sinc}\left(\frac{n\omega_0\tau}{2}\right)$$

rozwinięcie funkcji $\text{rect}_T(t)$:

$$\text{rect}_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n \exp(jn\omega_0 t) = \frac{A\tau}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \text{sinc}\left(\frac{n\omega_0\tau}{2}\right) \exp(jn\omega_0 t)$$



Przykłady rozwinięć w SF II A



Dla wypełnienia 50% i symetrii przebiegu względem obu osi znika składowa stała, a współczynniki są rzeczywiste. Współczynniki:

$$a_n = \frac{4A}{n\pi} \sin(n\pi/2)$$

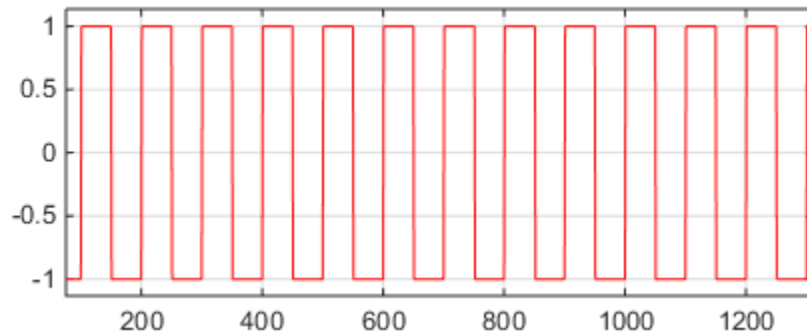
Rozwinięcie w szereg Fouriera:

$$rect_T(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp(jn\omega_0 t) = \frac{4A}{\pi} \left[\cos(\omega_0 t) - \frac{1}{3} \cos(3\omega_0 t) + \frac{1}{5} \cos(5\omega_0 t) - \dots \right]$$

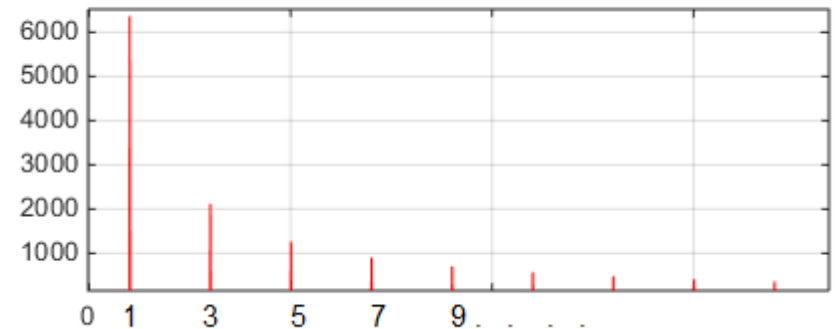
Analizowany przebieg prostokątny jest sumą nieparzystych harmonicznych funkcji $\cos\omega_0 t$ z malejącymi amplitudami, nie zawiera składowej stałej (średniej).

$$a_n = \frac{4A}{n\pi} \sin(n\pi/2)$$

Przykłady rozwinięć w SF II B



Sygnal



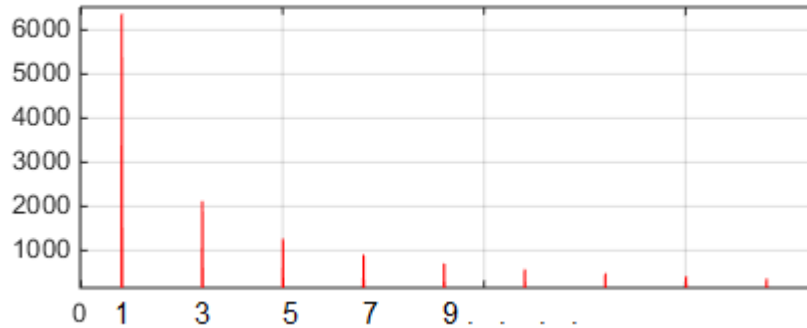
moduły współczynników rozwinięcia

$$rect_T(t) = \frac{4A}{\pi} \left[\cos(\omega_0 t) - \frac{1}{3} \cos(3\omega_0 t) + \frac{1}{5} \cos(5\omega_0 t) - \dots \right]$$

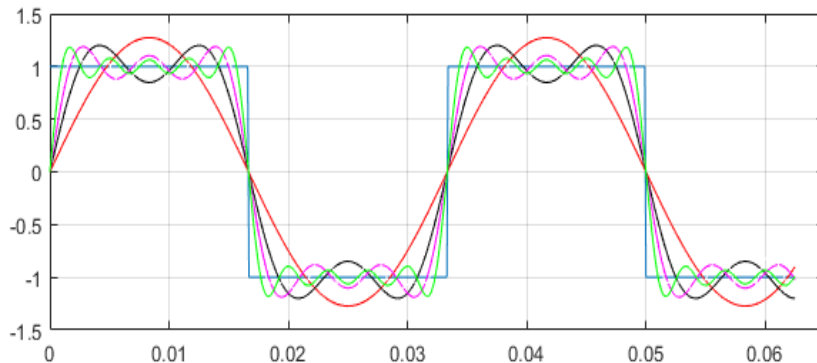
Analizowany przebieg - suma nieparzystych harmonicznych z malejącymi amplitudami, nie zawiera składowej stałej (średniej).



Przykłady rozwinięć w SF II C



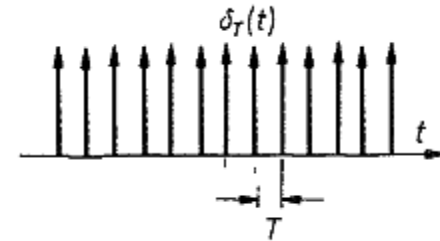
$$rect_T(t) = \frac{4A}{\pi} \left[\cos(\omega_0 t) - \frac{1}{3} \cos(3\omega_0 t) + \frac{1}{5} \cos(5\omega_0 t) - \dots \right]$$



Przebieg prostokątny aproksymowany sumą **jednej**, **dwóch**, **trzech** i **czterech** harmonicznych.

Przykłady rozwinięć w SF III

Ciąg $\delta_T(t)$:
$$\delta_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT)$$

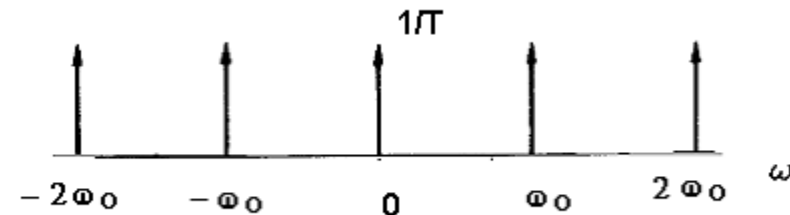


współczynniki rozwinięcia:

$$F_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT) \exp(-jn\omega_0 t) dt =$$

$$= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta(t) \exp(-jn\omega_0 t) dt = \frac{1}{T}$$

$$T = 2\pi/\omega_0$$



rozwinięcie ciągu $\delta_T(t)$: :

$$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n \exp(jn\omega_0 t) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \exp(jn\omega_0 t) = \frac{\omega_0}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \exp(jn\omega_0 t)$$

Przekształcenie Fouriera

Proste i odwrotne przekształcenia Fouriera funkcji $f(t)$

$$F(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\}$$

$$f(t) \leftrightarrow F(\omega)$$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \exp(-j\omega t) dt$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) \exp(j\omega t) d\omega$$

(istnieją gdy $f(t)$ jest bezwzględnie całkowalna)

Zapis

$|F(\omega)|$ - widmo gęstości amplitudy

$\arg(F(\omega))$ - widmo fazowe

$$F(\omega) = |F(\omega)| e^{j\arg(F(\omega))}$$

Wybrane właściwości przekształcenia Fouriera I

Liniowość:

$$f_1(t) \leftrightarrow F_1(\omega), f_2(t) \leftrightarrow F_2(\omega) \quad \Rightarrow \quad Af_1(t) + Bf_2(t) \leftrightarrow AF_1(\omega) + BF_2(\omega)$$

Podobieństwo:

$$F\{f(at)\} = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

Symetria:

$$f(t) \leftrightarrow F(\omega) \quad \Rightarrow \quad F(t) \leftrightarrow 2\pi f(-\omega)$$



Wybrane właściwości przekształcenia Fouriera II

Transformata pochodnej $f(t)$

$$f(t) \leftrightarrow F(\omega) \quad \Rightarrow \quad f'(t) \leftrightarrow (j\omega)F(\omega) \quad , \quad f^n(t) \leftrightarrow (j\omega)^n F(\omega)$$

Przesunięcie w czasie

$$f(t) \leftrightarrow F(\omega) \quad \Rightarrow \quad f(t-t_0) \leftrightarrow \exp(-j\omega t_0)F(\omega)$$



Wybrane właściwości przekształcenia Fouriera III

Transformata splotu funkcji

$$f_1(t) \leftrightarrow F_1(\omega), \quad f_2(t) \leftrightarrow F_2(\omega)$$

**jest iloczynem transformat
splatanych funkcji!!!**

$$F\{f_1(t) * f_2(t)\} = F_1(\omega)F_2(\omega)$$



Wybrane właściwości przekształcenia Fouriera IV

Transformata iloczynu funkcji

$$f_1(t) \leftrightarrow F_1(\omega), \quad f_2(t) \leftrightarrow F_2(\omega)$$

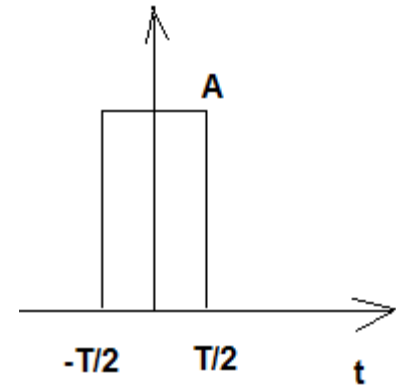
**jest splotem transformat
mnożonych funkcji!!!!!!**

$$F\{f_1(t)f_2(t)\} = \frac{1}{2\pi} F_1(\omega) * F_2(\omega)$$



Przykłady transformat Fouriera I

Sygnal prostokątny o czasie trwania T $rect(T)$:



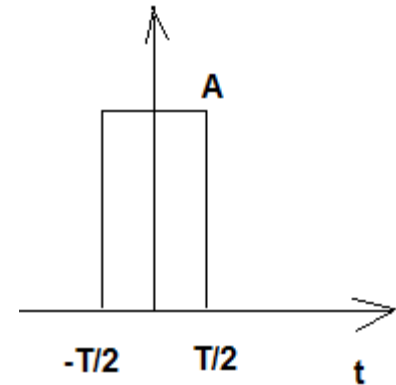
$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \exp(-j\omega t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} rect(T) \exp(-j\omega t) dt$$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} rect(T) \exp(-j\omega t) dt = \int_{-T/2}^{T/2} A \exp(-j\omega t) dt = -A \frac{1}{j\omega} \exp(-j\omega t) \Big|_{-T/2}^{T/2}$$

$$F(\omega) = -A \frac{1}{j\omega} \exp(-j\omega t) \Big|_{-T/2}^{T/2} = \frac{-A}{j\omega} [\exp(-j\omega T/2) - \exp(j\omega T/2)]$$

Przykłady transformacji Fouriera II

Sygnal prostokątny o czasie trwania T $\text{rect}(T)$:



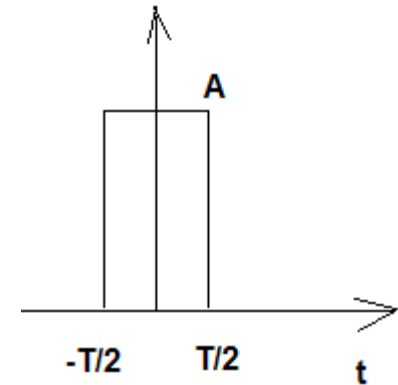
$$F(\omega) = \frac{-A}{j\omega} [\exp(-j\omega T/2) - \exp(j\omega T/2)] =$$

$$= \frac{-A}{j\omega} [\cos(-\omega T/2) - j \sin(-\omega T/2) - \cos(\omega T/2) - j \sin(\omega T/2)] = \frac{A}{j\omega} 2j \sin(\omega T/2)$$

$$F(\omega) = \frac{A}{j\omega} 2j \sin(\omega T/2) = AT \frac{\sin(\frac{\omega T}{2})}{\frac{\omega T}{2}} = AT \text{sinc}\left(\frac{\omega T}{2}\right)$$

Przykłady transformat Fouriera III

Sygnal prostokątny o czasie trwania T $\text{rect}(T)$:

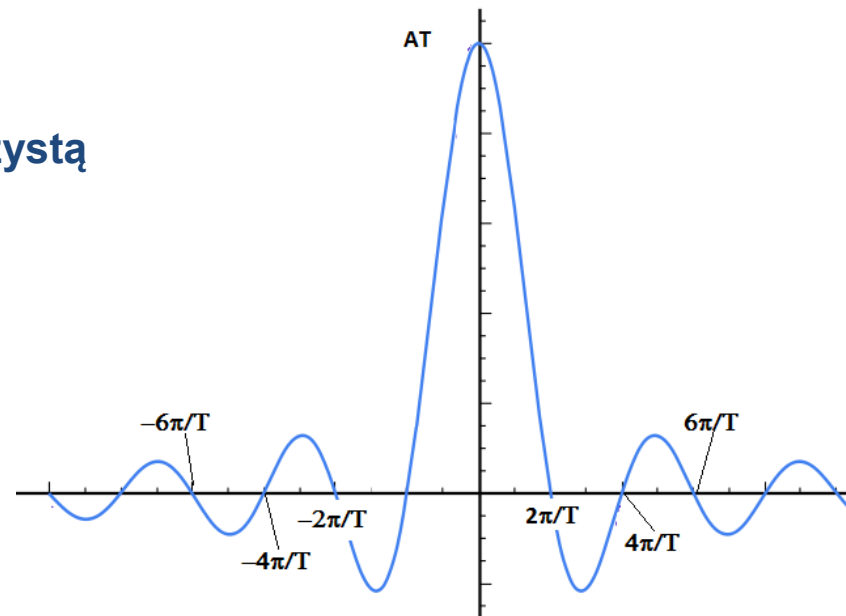


TF sygnału prostokątnego:

$$F(\omega) = AT \sin c\left(\frac{\omega T}{2}\right)$$

$F(\omega)$ jest funkcją rzeczywistą parzystą (część urojona jest zerowa).

Wykres $F(\omega)$

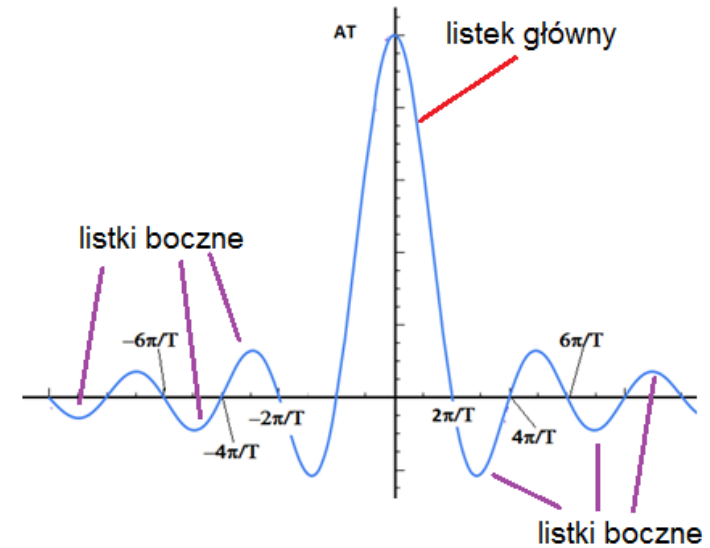


Przykłady transformat Fouriera IV

Sygnal prostokątny o czasie trwania T $\text{rect}(T)$:

$F(\omega)$ sygnału prostokątnego:

$$F(\omega) = AT \sin c\left(\frac{\omega T}{2}\right)$$



Położenia zer części rzeczywistej (i modułu) $F(\omega)$ – $\omega = \pm 2k\pi/T$ ($k > 1$)

Szerokość listka głównego $4\pi/T$ (mierzona jako odległość między zerami modułu TF)

Położenia ekstremów listków bocznych – $\omega_m = \pm 3\pi/2 \pm m\pi/T$ ($m = 0, 1, \dots$)

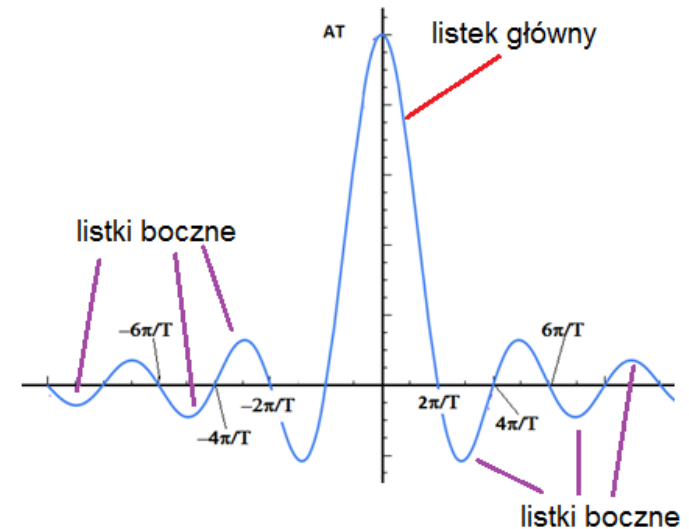
Szerokość listków bocznych $2\pi/T$

Przykłady transformat Fouriera V

Sygnal prostokątny o czasie trwania T $\text{rect}(T)$:

$F(\omega)$ sygnału prostokątnego:

$$F(\omega) = AT \text{sinc}\left(\frac{\omega T}{2}\right)$$



Wartość maksymalna listka głównego – AT

Wartość maksymalna modułu pierwszego listka bocznego - $2AT/3\pi$ ($AT \text{sinc}(3\pi/2)$);

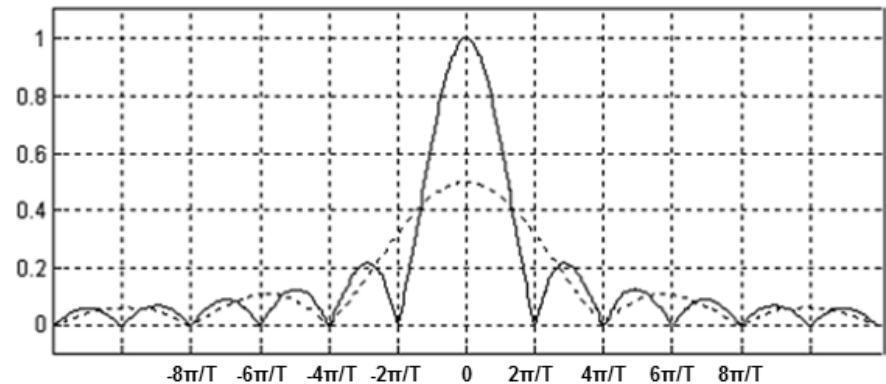
Stosunek maks. wartości modułów listka pierwszego i głównego – $2/3\pi=0.21$

Przykłady transformat Fouriera VI

Znormalizowany moduł TF sygnału prostokątnego $\text{rect}(T)$ o czasie trwania T :

$$\frac{|F(\omega)|}{AT} = \left| \text{sinc} \left(\frac{\omega T}{2} \right) \right|$$

linia ciągła – czas trwania sygnału T ;
linia przerywana – czas trwania $T/2$.



Maksymalna wartość listka głównego modułu TF dla czasu trwania $T - 1$;
dla czasu trwania $T/2 - 1/2$

Maksymalna wartość modułu pierwszego listka bocznego po normalizacji $2/3\pi$

Stosunek maks. wartości modułów listka pierwszego i głównego – $2/3\pi=0.21$

Przykłady transformat Fouriera VII

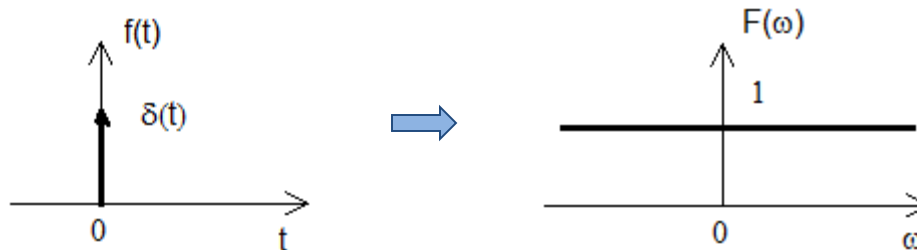
Dystrybucja delta Diraca:

Właściwość dystrybucji:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t-t_0) = f(t_0) \quad \Rightarrow \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t) = f(0)$$

Transformata dystrybucji:

$$F\{\delta(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\exp(-j\omega t)dt = 1$$



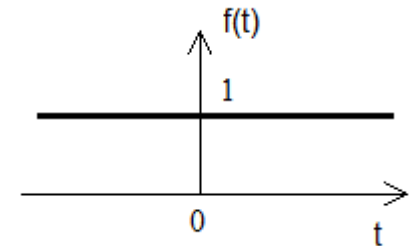
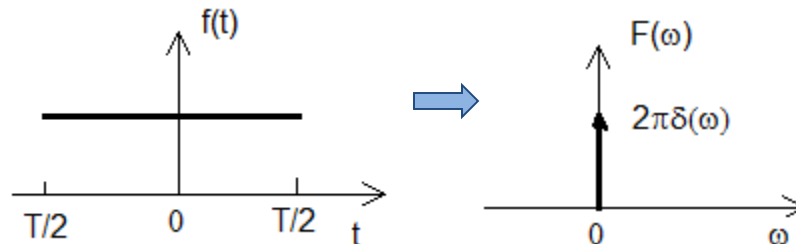
Przykłady transformat Fouriera VIII

Funkcja stała

TF nie istnieje w myśl definicji – funkcja nie jest bezwzględnie całkowna. Można wyznaczyć wartość główną TF przy $T \rightarrow +\infty$:

$$F(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{T/2} \exp(-j\omega t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} T \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega T}{2}\right) =$$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty} 2\pi \frac{T}{2\pi} \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega T}{2}\right) = 2\pi\delta(\omega)$$



Definicja delty Diraca:

$$\delta(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{\pi} \operatorname{sinc}(kt)$$

Przykłady transformat Fouriera IX

Funkcja stała

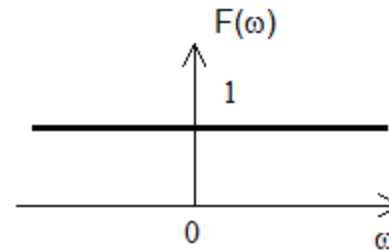
Właściwość symetrii TF !!!!!

$$f(t) \leftrightarrow F(\omega)$$

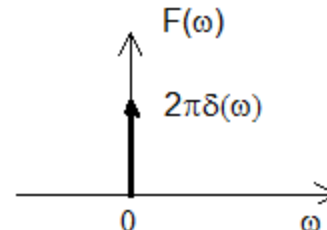
$$F(t) \leftrightarrow 2\pi f(-\omega)$$

**Skoro TF delty Diraca
jest funkcją stałą:**

$$F\{\delta(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) \exp(-j\omega t) dt = 1$$



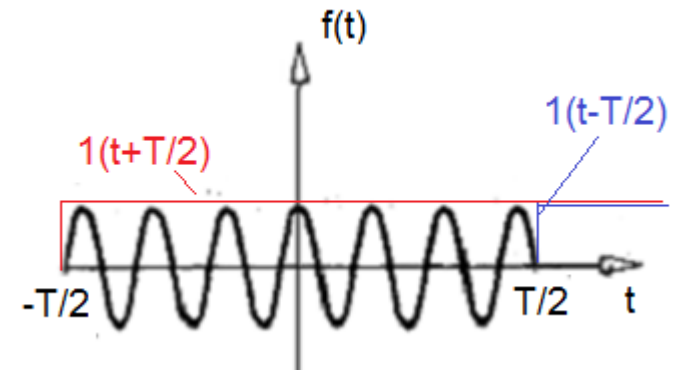
$$F(\omega) = 2\pi\delta(-\omega) = 2\pi\delta(\omega)$$



**Na mocy właściwości
symetrii TF transformata
funkcji stałej ma postać
delty Diraca:**

Przykłady transformat Fouriera X

Sygnał cosinusoidalny o ograniczonym czasie trwania (paczka) i jednostkowej amplitudzie



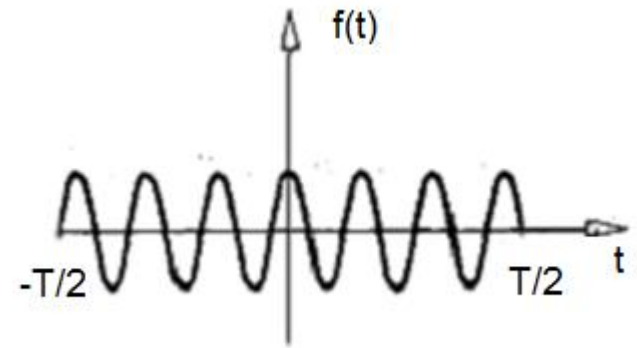
$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \exp(-j\omega t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(\omega_0 t) [1(t+T/2) - 1(t-T/2)] \exp(-j\omega t) dt = \int_{-T/2}^{T/2} \cos(\omega_0 t) \exp(-j\omega t) dt$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} \cos(\omega_0 t) \exp(-j\omega t) dt = \frac{1}{2} \int_{-T/2}^{T/2} [\exp(j\omega_0 t) + \exp(-j\omega_0 t)] \exp(-j\omega t) dt =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-T/2}^{T/2} [\exp(-j(\omega - \omega_0 t)) + \exp(-j(\omega + \omega_0 t))] dt$$

Przykłady transformat Fouriera XI

Sygnał cosinusoidalny o ograniczonym czasie trwania (paczka) i jednostkowej amplitudzie



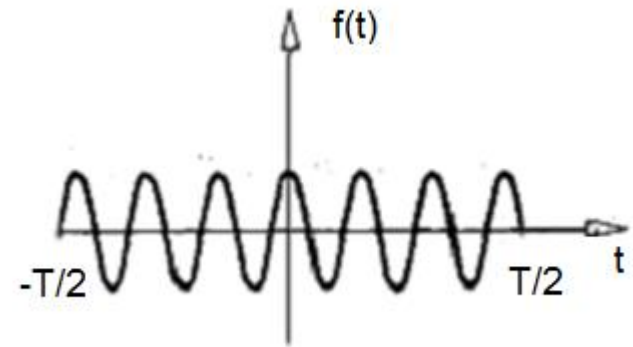
$$\frac{1}{2} \int_{-T/2}^{T/2} [\exp(-j(\omega - \omega_0)t) + \exp(-j(\omega + \omega_0)t)] dt$$

$$\frac{1}{2} \int_{-T/2}^{T/2} [\exp(-j(\omega - \omega_0)t) + \exp(-j(\omega + \omega_0)t)] dt =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{-1}{j(\omega - \omega_0)} \exp(-j(\omega - \omega_0)t) \Big|_{-T/2}^{T/2} + \frac{1}{2} \frac{-1}{j(\omega + \omega_0)} \exp(-j(\omega + \omega_0)t) \Big|_{-T/2}^{T/2}$$

Przykłady transformat Fouriera XII

Sygnał cosinusoidalny o ograniczonym czasie trwania (paczka) i jednostkowej amplitudzie



$$\frac{1}{2} \frac{-1}{j(\omega - \omega_0)} \exp(-j(\omega - \omega_0)t) \Big|_{-T/2}^{T/2} + \frac{1}{2} \frac{-1}{j(\omega + \omega_0)} \exp(-j(\omega + \omega_0)t) \Big|_{-T/2}^{T/2}$$

Analogia do obliczania TF okna prostokątnego:

$$F(\omega) = -A \frac{1}{j\omega} \exp(-j\omega t) \Big|_{-T/2}^{T/2} = \frac{-A}{j\omega} [\exp(-j\omega T/2) - \exp(j\omega T/2)]$$

$$\frac{-A}{j\omega} [\exp(-j\omega T/2) - \exp(j\omega T/2)] = \frac{-A}{j\omega} [\cos(-\omega T/2) - j \sin(-\omega T/2) - \cos(\omega T/2) - j \sin(-\omega T/2)] = \frac{A}{j\omega} 2j \sin(\omega T/2)$$

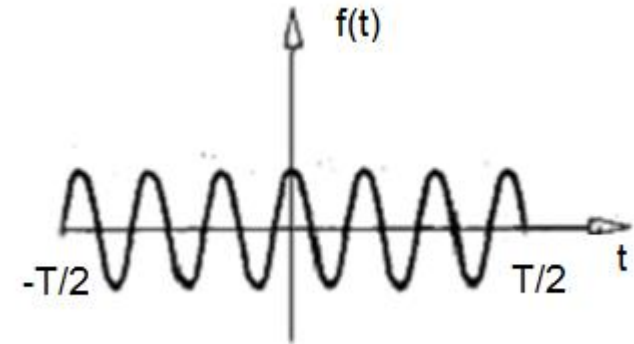
ω zostaje zastąpione przez $(\omega - \omega_0)$ bądź $(\omega + \omega_0)$

$$\omega \leftrightarrow \omega - \omega_0$$

$$\omega \leftrightarrow \omega + \omega_0$$

Przykłady transformat Fouriera XIII

Sygnał cosinusoidalny o ograniczonym czasie trwania (paczka) i jednostkowej amplitudzie



Analogia do obliczania TF okna prostokątnego:

$$\frac{A}{j\omega} 2j \sin(\omega T / 2)$$

ω zostaje zastąpione przez $(\omega - \omega_0)$ bądź $(\omega + \omega_0)$

$$\omega \Leftrightarrow \omega - \omega_0$$

$$\omega \Leftrightarrow \omega + \omega_0$$

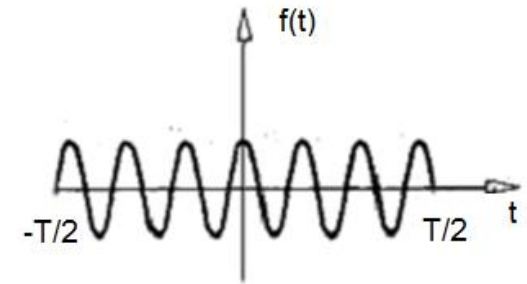
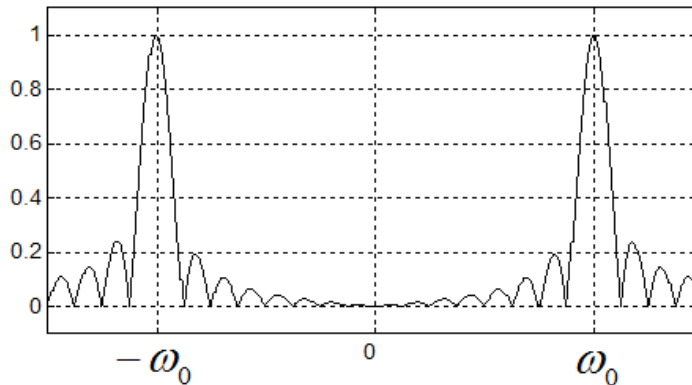
$$\frac{1}{2} \frac{-1}{j(\omega - \omega_0)} \exp(-j(\omega - \omega_0)t) \Big|_{-T/2}^{T/2} + \frac{1}{2} \frac{-1}{j(\omega + \omega_0)} \exp(-j(\omega + \omega_0)t) \Big|_{-T/2}^{T/2} = \frac{T}{2} \left[\text{sinc}\left(\frac{(\omega - \omega_0)T}{2}\right) + \text{sinc}\left(\frac{(\omega + \omega_0)T}{2}\right) \right]$$



Przykłady transformat Fouriera XIV

Sygnał cosinusoidalny o ograniczonym czasie trwania (paczka) i jednostkowej amplitudzie

$$F(\omega) = \frac{T}{2} \left[\operatorname{sinc} \left(\frac{(\omega - \omega_0)T}{2} \right) + \operatorname{sinc} \left(\frac{(\omega + \omega_0)T}{2} \right) \right]$$



Moduł TF paczki funkcji cosinus o czasie trwania T , oś Y znormalizowana do $T/2$.

Położenia ekstremów, zer, wartości maksymalne listka głównego i listków bocznych określamy podobnie jak w przypadku TF okna prostokątnego.

Przykłady transformat Fouriera XV

Sygnal cosinusoidalny

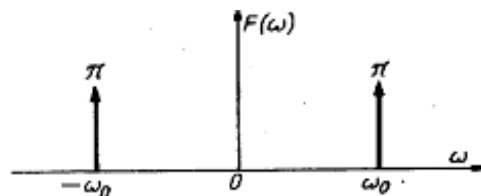
TF nie istnieje w sensie definicji, ponieważ funkcja cosinus nie jest bezwzględnie całkowna. Można wyznaczyć wartość główną TF paczki fali cos przy $T \rightarrow +\infty$.

$$F(\omega) = \int_{-T/2}^{T/2} \cos(\omega_0 t) \exp(-j\omega t) dt = \frac{T}{2} \left[\text{sinc} \left(\frac{(\omega - \omega_0)T}{2} \right) + \text{sinc} \left(\frac{(\omega + \omega_0)T}{2} \right) \right]$$

Definicja delty Diraca:

$$\delta(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{\pi} \text{sinc}(kt)$$

$$F\{\cos(\omega_0 t)\} = \lim_{T \rightarrow \infty} \pi \left[\frac{T}{2\pi} \text{sinc} \left(\frac{(\omega - \omega_0)T}{2} \right) + \frac{T}{2\pi} \text{sinc} \left(\frac{(\omega + \omega_0)T}{2} \right) \right] = \pi [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$$



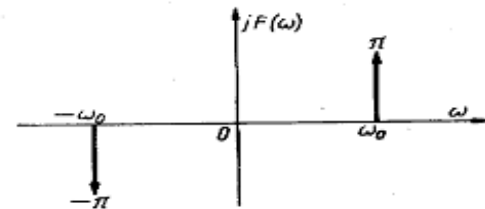
Przykłady transformat Fouriera XVI

Sygnał sinusoidalny

TF nie istnieje w sensie definicji. Można wyznaczyć wartość główną TF paczki fali sin przy $T \rightarrow +\infty$. TF paczki fali sin:

$$F\{\sin(\omega_0 t)_T\} = j \frac{T}{2} \left[-\operatorname{sinc}\left(\frac{(\omega - \omega_0)T}{2}\right) + \operatorname{sinc}\left(\frac{(\omega + \omega_0)T}{2}\right) \right]$$

$$F\{\sin(\omega_0 t)\} = j\pi[-\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$$



(na rysunku $jF(\omega)$!!)

Przykłady transformat Fouriera XVII

Zespolony sygnał wykładniczy

$$\exp(j\omega_0 t) = \cos(\omega_0 t) + j \sin(\omega_0 t)$$

Sygnał cosinusoidalny

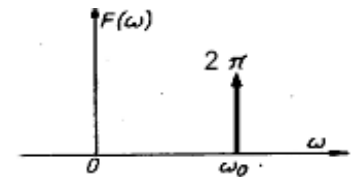
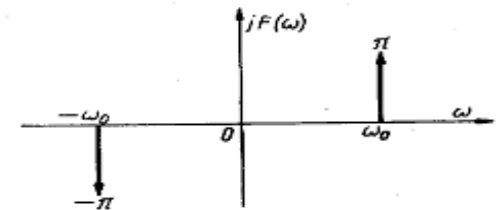
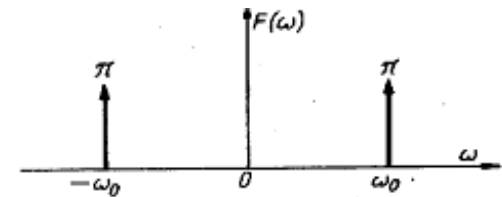
$$F\{\cos(\omega_0 t)\} = \pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$$

Sygnał sinusoidalny

$$F\{\sin(\omega_0 t)\} = j\pi[-\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$$

$$F\{\exp(j\omega_0 t)\} = F\{\cos(\omega_0 t)\} + jF\{\sin(\omega_0 t)\} = 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$$

na rys. $jF\{\sin(\omega_0 t)\}$



Jest to tzw. sygnał analityczny – posiada niezerowe wartości TF tylko po jednej stronie początku układu.

Przykłady transformat Fouriera XVIII

TF dowolnej funkcji okresowej nie istnieje w sensie definicji

Można taką funkcję rozwinąć w SF:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n \exp(jn\omega_0 t)$$

a następnie przeprowadzić TF rozwinięcia - ponieważ znamy TF zespolonej funkcji wykładniczej!!!

$$F(\omega) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n \delta(\omega - n\omega_0)$$



Przykłady transformat Fouriera XIX

TF dowolnej funkcji okresowej nie istnieje w sensie definicji

Można taką funkcję rozwinąć w SF, potem przeprowadzić TF rozwinięcia

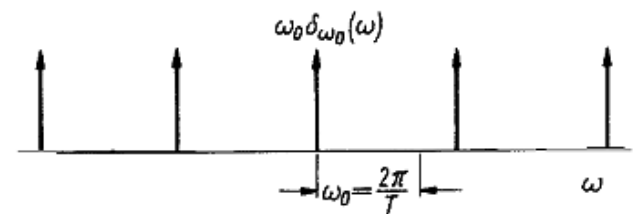
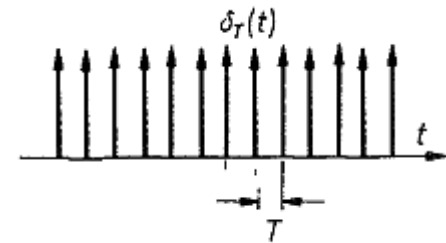
Ciąg dystrybucji Diraca

posiada następujące rozwinięcie w SF:

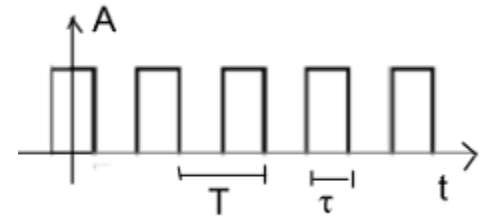
$$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n \exp(jn\omega_0 t) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \exp(jn\omega_0 t)$$

wobec tego jego TF jest równa:

$$F\{\delta_T(t)\} = \frac{2\pi}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - n\omega_0) = \omega_0 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - n\omega_0)$$



Przykłady transformat Fouriera XX



Przebieg prostokątny $\text{rect}_T(t)$ (okres T , wypełnienie τ/T , amplituda A , $\omega_0=2\pi/T$):

Sposób I

Wyznaczamy rozwinięcie w SF sygnału prostokątnego, a następnie TF rozwinięcia:

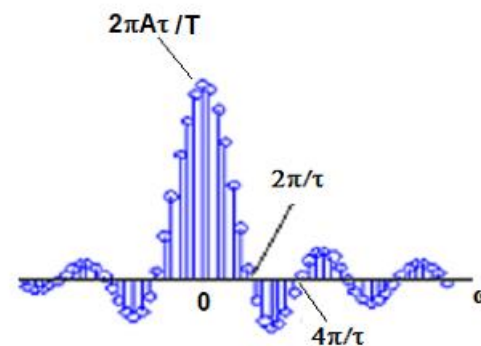
Współczynniki rozwinięcia w SF

$$F_n = \frac{1}{T} \int_{-\tau/2}^{T-\tau/2} \exp(-jn\omega_0 t) dt = \frac{A\tau}{T} \text{sinc}\left(\frac{n\omega_0\tau}{2}\right)$$

$$F\{\text{rect}_T(t)\} = F\left\{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n \exp(jn\omega_0 t)\right\} =$$

$$= \frac{2\pi A\tau}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \text{sinc}\left(\frac{n\omega_0\tau}{2}\right) \delta(\omega - n\omega_0) =$$

$$= \frac{2\pi A\tau}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \text{sinc}\left(\frac{n\pi\tau}{T}\right) \delta(\omega - n\omega_0)$$



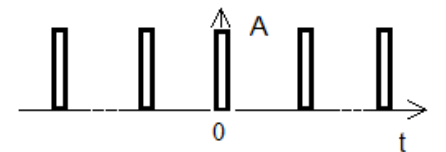
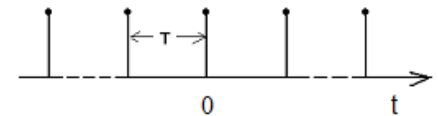
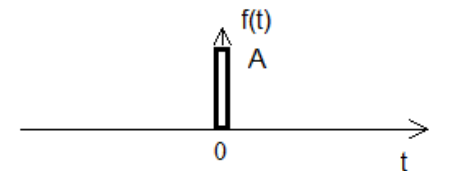
Przykłady transformat Fouriera XXI

Przebieg prostokątny $rect_T(t)$ (okres T , wypełnienie τ/T , amplituda A , $\omega_0=2\pi/T$):

Sposób II

okresowy sygnał prostokątny jest wynikiem splotu okresowego ciągu delt Diraca o okresie T i okna prostokątnego o amplitudzie A i czasie trwania τ

$$rect_T(t) = rect(t) * \delta_T(t) = rect(t) * \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} rect(t - kT)$$



TF splotu funkcji jest iloczynem TF!

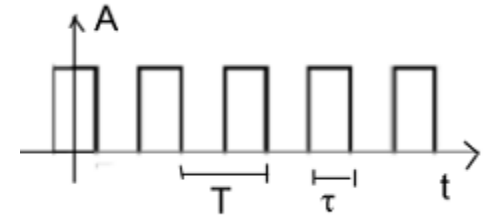
$$F\{f_1(t) * f_2(t)\} = F_1(\omega)F_2(\omega)$$

TF obu splatanych
funkcji znamy!!!

$$F\{\delta_T(t)\} = \frac{2\pi}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - n\omega_0)$$

$$F(\omega) = A\tau \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

Przykłady transformat Fouriera XXII



Przebieg prostokątny $\text{rect}_T(t)$ (okres T , wypełnienie τ/T , amplituda A , $\omega_0=2\pi/T$):

Sposób II

okresowy sygnał prostokątny jest wynikiem splotu okresowego ciągu delt Diraca o okresie T i okna prostokątnego o amplitudzie A i czasie trwania τ

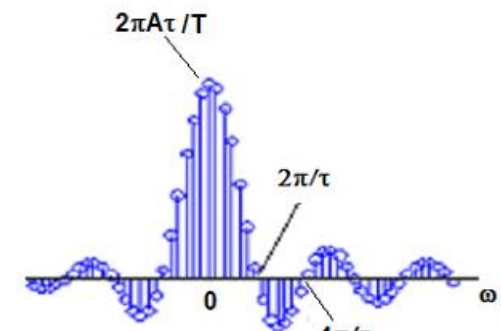
$$F\{\delta_T(t)\} = \frac{2\pi}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - n\omega_0)$$

$$F(\omega) = A\tau \text{sinc}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

$$F\{\text{rect}_T(t)\} = F\{\delta_T(t)\}F\{\text{rect}(\tau)\} = \left[\frac{2\pi}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - n\omega_0)\right]A\tau \text{sinc}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) =$$

$$= \frac{2\pi A\tau}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \text{sinc}\left(\frac{n\omega_0\tau}{2}\right)\delta(\omega - n\omega_0) =$$

$$= \frac{2\pi A\tau}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \text{sinc}\left(\frac{n\pi\tau}{T}\right)\delta(\omega - n\omega_0)$$



Transformacja Fouriera – podsumowanie właściwości

Sygnal rzeczywisty parzysty - TF rzeczywista, parzysta

przykład $\cos(\omega_0 t)$, $\text{rect}(t)$

Sygnal rzeczywisty nieparzysty - TF urojona, nieparzysta

przykład $\sin(\omega_0 t)$,

Sygnal urojony parzysty - TF urojona, parzysta

przykład $j\cos(\omega_0 t)$

Sygnal urojony nieparzysty - TF rzeczywista, nieparzysta

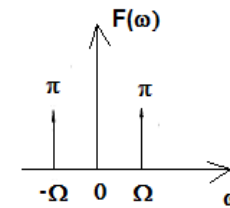
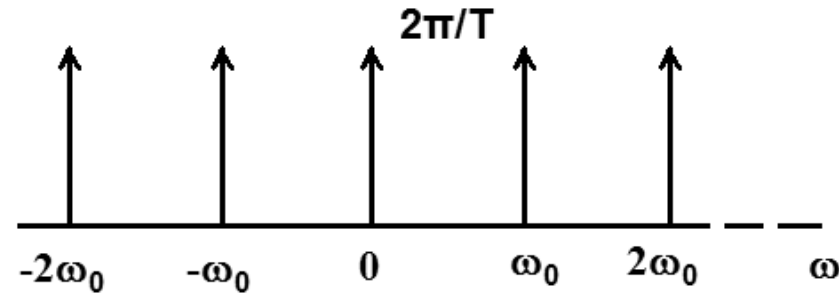
przykład $j\sin(\omega_0 t)$



Transformata Fouriera

Iloczyn funkcji cosinusoidalnej o pulsacji Ω i ciągu delt Diraca o okresie $T=2\pi/\omega_0$, $\omega_0 \gg \Omega$

$$\delta_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT) \qquad F\{\delta_T(t)\} = \frac{2\pi}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - n\omega_0)$$



$$F\{\cos(\Omega t)\} = \pi[\delta(\omega - \Omega) + \delta(\omega + \Omega)]$$

TF iloczynu funkcji jest splotem transformat!

Należy wyznaczyć splot TF funkcji cosinusoidalnej i TF ciągu delt Diraca!!!

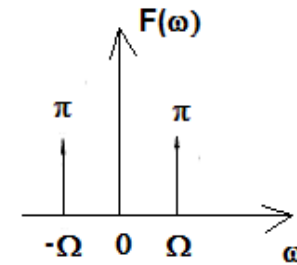
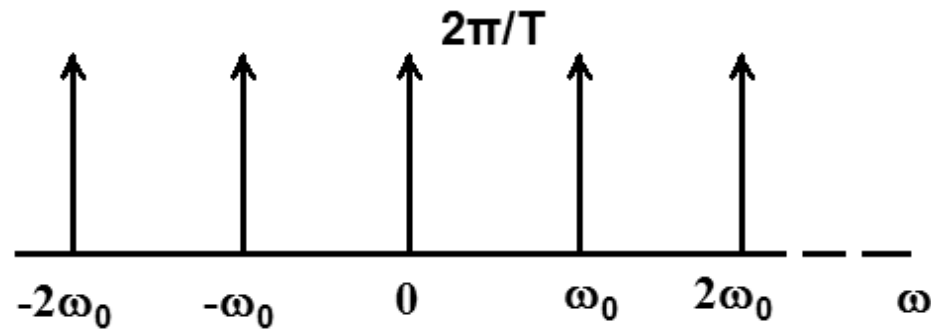
$$F\{\cos(\Omega t)\delta_T(t)\} = \frac{1}{2\pi} F\{\cos(\Omega t)\} * F\{\delta_T(t)\}$$

Transformata Fouriera

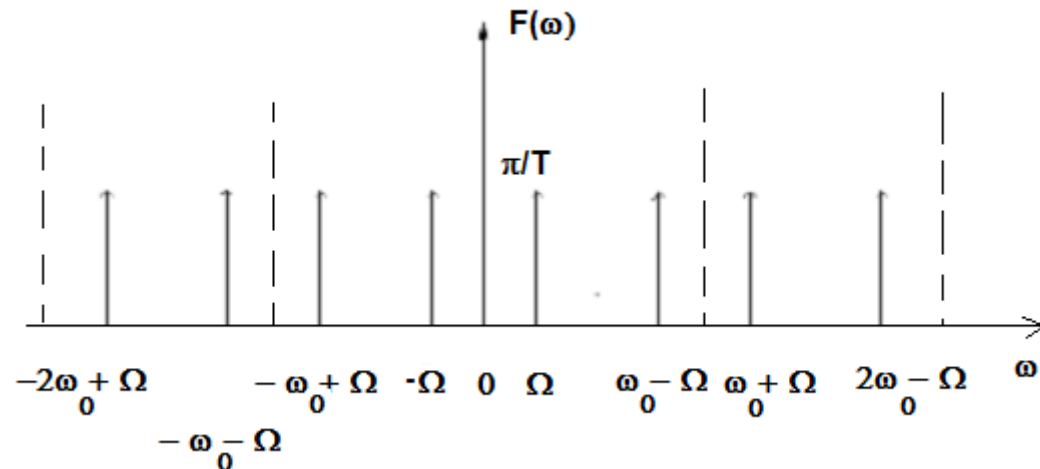
Iloczyn funkcji cosinusoidalnej o pulsacji Ω i ciągu delt Diraca o okresie $T=2\pi/\omega_0$, $\omega_0 > \Omega$

Splot transformat funkcji cosinusoidalnej i ciągu delt Diraca:

$$F\{\cos(\Omega t)\delta_T(t)\} = \frac{1}{2\pi} \pi\{[\delta(\omega - \Omega) + \delta(\omega + \Omega)]\} * \left[\frac{2\pi}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - n\omega_0)\right]$$



$$F\{\cos(\Omega t)\delta_T(t)\} = \frac{\pi}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - n\omega_0 \pm \Omega)$$

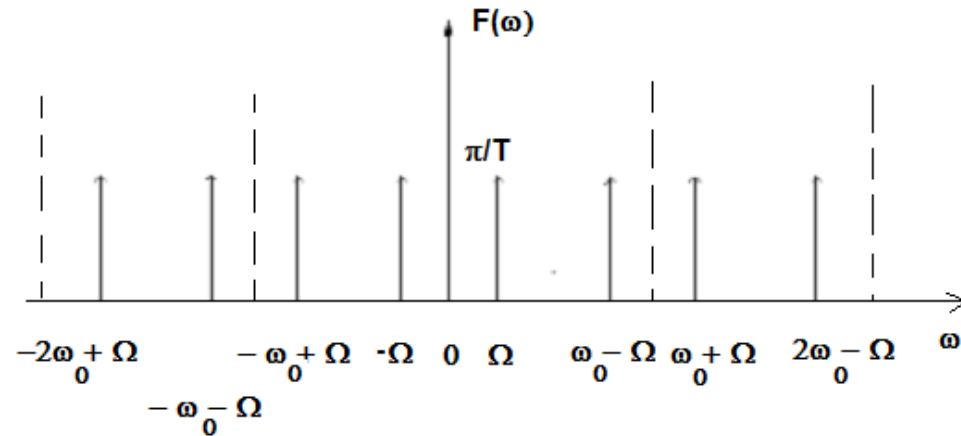
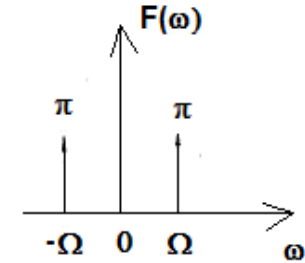


TF – tw. o próbkowaniu I

Iloczyn funkcji cosinusoidalnej o pulsacji Ω i ciągu delt Diraca o okresie $T=2\pi/\omega_0$, $\omega_0 > \Omega$

Transformata iloczynu funkcji cosinusoidalnej i ciągu delt Diraca:

$$F\{\cos(\Omega t)\delta_T(t)\} = \frac{\pi}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - n\omega_0 \pm \Omega)$$

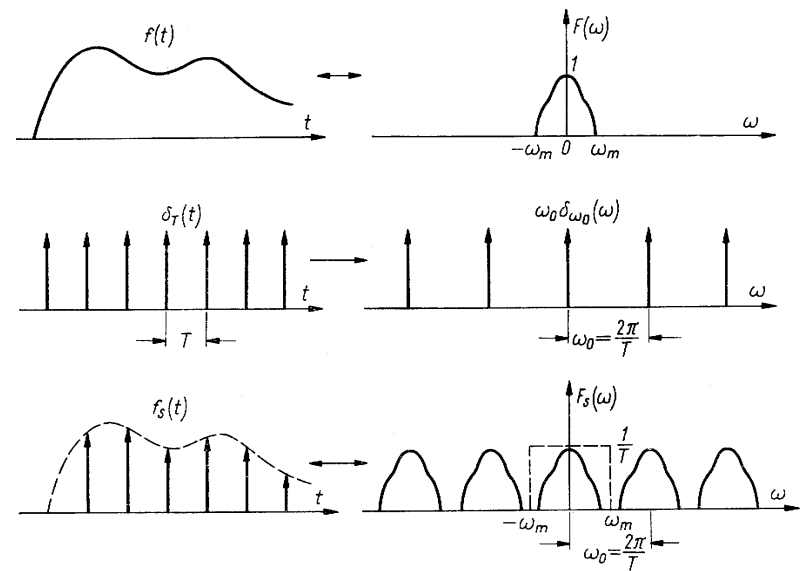


Transformata iloczynu dowolnej funkcji i ciągu delt Diraca:

$$F\{f(t)\delta_T(t)\} = \frac{1}{2\pi} F(\omega) * F\{\delta_T(t)\} = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F(\omega - n\omega_0)$$

TF – tw. o próbkowaniu II

$$F\{f(t)\delta_T(t)\} = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F(\omega - n\omega_0)$$



Widmo sygnału próbkowanego jest okresowe z okresem równym częstotliwości (pulsacji) próbkowania!!

Jak wynika z rysunku obok, aby kolejne repliki widm nie nałożyły się na siebie, należy spełnić warunek:

$$f_0 \geq 2f_{\max}$$

$$\omega_0 \geq 2\omega_{\max}$$

!!!!!!

Jest to tzw. twierdzenie o próbkowaniu (tw. Shannona, warunek Nyquista), które wymaga, by sygnał był próbkowany z częstotliwością/pulsacją conajmniej równą podwojonej wartości maksymalnej częstotliwości/pulsacji widma sygnału. W praktyce warunek ten musi być spełniony z nadmiarem.

Jest to twierdzenie o fundamentalnym znaczeniu dla cyfrowego przetwarzania sygnałów. Jego niespełnienie skutkuje niemożnością odtworzenia sygnału ciągłego na podstawie jego próbek.

TF – tw. o próbkowaniu III

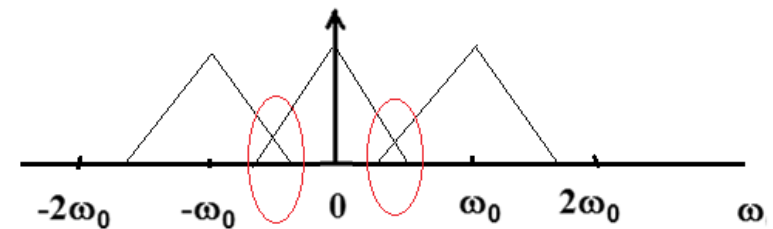
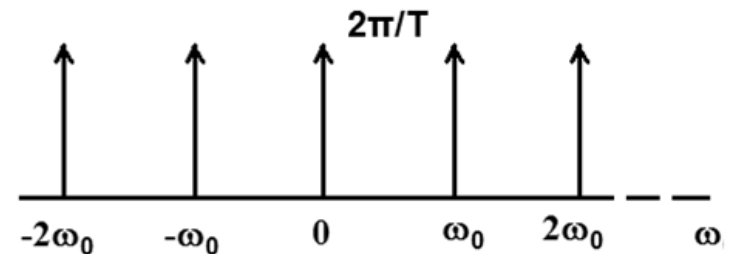
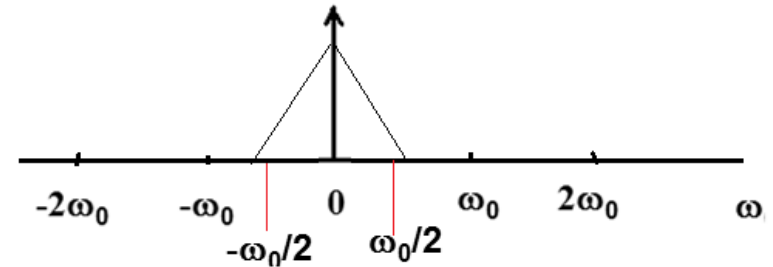
Twierdzenie o próbkowaniu wymaga, by sygnał był próbkowany z częstotliwością/pulsacją conajmniej równą podwojonej wartości maksymalnej częstotliwości/pulsacji widma sygnału.

$$f_0 \geq 2f_{\max}$$

$$\omega_0 \geq 2\omega_{\max}$$

Niespełnienie tego warunku skutkuje nakładaniem się widm (tzw. „aliasing” – patrz obszary w czerwonych elipsach obok) i niemożnością odtworzenia sygnału czasu ciągłego na podstawie jego próbek.

$$F\{f(t)\delta_T(t)\} = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F(\omega - n\omega_0)$$



Energia, moc, widmowa gęstość energii i mocy

Energia, moc, widmowa gęstość energii i mocy I

Sygnaly o skończonym czasie trwania i skończonej energii w skończonym przedziale czasu

sygnaly nieokresowe, bezwzględna całkowalność, moc średnia równa zero, energia sygnału E określona jest przez zależność (tw. Parsevala):

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega$$

Zastosowanie przekształcenia Fouriera

$|F(\omega)|^2$ - widmowa gęstość energii (1Ω)

Energia, moc, widmowa gęstość energii i mocy II

Sygnały okresowe

Rozwinięcie w szereg Fouriera T- okres sygnału

$$F_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \exp(-jn\omega t) dt$$

$|F_n|$ - widmo amplitudy

$|F_n|^2$ - widmo mocy

moc sygnału P (tw. Parsewala)

(energia tracona w jednostce czasu w oporności 1Ω –
związki z elektrotechniką)

$$P = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f^2(t) dt = \sum_{-\infty}^{+\infty} |F_n|^2$$

Energia, moc, widmowa gęstość energii i mocy III

Sygnaly o nieskończonym czasie trwania i nieskończonej energii w nieskończonym przedziale czasu

Sygnaly o nieskończonym czasie trwania (np. okresowe) - energia nieskończona w nieskończonym przedziale, TF z definicji nie istnieje (funkcja nie jest bezwzględnie całkowalna), można określić moc średnią P (uśrednienie za czas obserwacji T):

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|F_T(\omega)|^2}{T} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\omega) d\omega$$

$\Phi(\omega)$ - widmowa gęstość mocy:

$$\Phi(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|F_T(\omega)|^2}{T}$$

w praktyce - ze względu na ograniczoną długość rekordu danych T

$$\Phi(\omega) = \frac{|F_T(\omega)|^2}{T}$$