



**PROGRAM ROZWOJOWY
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ**

PRZETWARZANIE SYGNAŁÓW

SEMESTR V

Człowiek- najlepsza inwestycja



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



*Projekt współfinansowany przez Unię Europejską
w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego*



**PROGRAM ROZWOJOWY
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ**

Wykład II

Wprowadzenie

Podstawy teoretyczne przetwarzania sygnałów



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



Szereg Fouriera i przekształcenie Fouriera



Jean Baptiste Joseph Fourier

21.03.1768 – 16.05.1830

1822 – stwierdził, że pewne funkcje można przedstawić w postaci nieskończonej sumy harmonicznych

teoria transmisji ciepła, teoria drgań, efekt szklarniowy, prace nad liczbą rozwiązań równań algebraicznych sekretarz Akademii Francuskiej, członek Królewskiej Szwedzkiej Akademii Nauk

Trygonometryczny szereg Fouriera

$f(t)$ – okresowa, okres T , spełnia warunki Dirichleta;

rozwińcie $f(t)$ w szereg trygonometryczny Fouriera:

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)] \quad T=2\pi/\omega_0, n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

współczynniki rozwinięcia:

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt \quad a_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(n\omega_0 t) dt \quad b_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin(n\omega_0 t) dt$$

Wykładniczy szereg Fouriera

rozwińnięcie $f(t)$ w szereg wykładniczy Fouriera: $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} F_n \exp(jn\omega_0 t)$

współczynniki rozwińnięcia $F_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \exp(-jn\omega_0 t) dt$

$$F_n = |F_n| e^{j \arg(F_n)}$$

$\{|F_n|\}$ - widmo amplitudowe, $\{\arg(F_n)\}$ – widmo fazowe

$\{|F_n|^2\}$ - widmo mocy sygnału $f(t)$

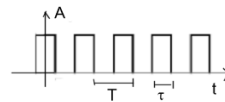
Związek między współczynnikami rozwińnięcia w szereg wykładniczy i w szereg trygonometryczny:

$$F_n = a_n - jb_n$$



Przykłady rozwińnięć w SF I

$rect_\tau(t)$ - ciąg impulsów prostokątnych o współczynniku wypełnienia τ/T

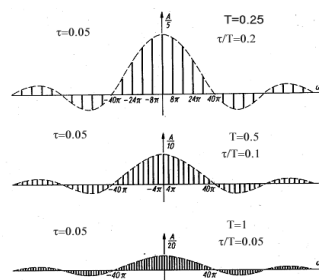


współczynniki rozwińnięcia:

$$F_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} rect_\tau(t) \exp(-jn\omega_0 t) dt =$$

$$= \frac{1}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} A \exp(-jn\omega_0 t) dt = \frac{A\tau}{T} \text{sinc}\left(\frac{n\omega_0\tau}{2}\right)$$

$$T = 2\pi/\omega_0$$



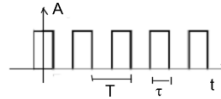
przebiegi współczynników rozwińnięcia dla różnych wartości T i ustalonej wartości τ .



Przykłady rozwinięć w SF I

$rect_T(t)$ - ciąg impulsów prostokątnych o współczynniku wypełnienia τ/T :

$$T=2\pi/\omega_0$$



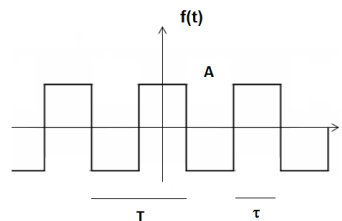
współczynniki rozwinięcia:

$$F_n = \frac{A\tau}{T} \operatorname{sinc}\left(\frac{n\omega_0\tau}{2}\right)$$

rozwinięcie funkcji $rect_T(t)$:

$$rect_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n \exp(jn\omega_0 t) = \frac{A\tau}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \operatorname{sinc}\left(\frac{n\omega_0\tau}{2}\right) \exp(jn\omega_0 t)$$

Przykłady rozwinięć w SF Ia



Dla wypełnienia 50% i symetrii mamy:

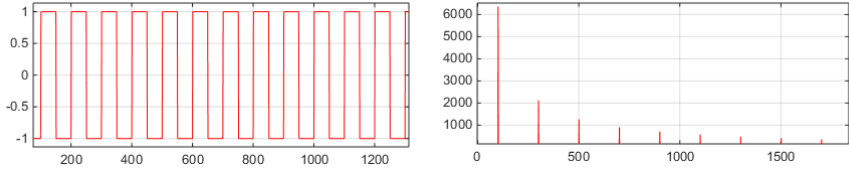
Rozwinięcie w szereg Fouriera:

$$F_n = \frac{2A}{jn\pi} \sin^2\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0 & \text{dla } n \text{ parzystych} \\ \frac{2A}{jn\pi} & \text{dla } n \text{ nieparzystych} \end{cases}$$

$$rect_T(t) = \frac{2A}{j\pi} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n} \sin^2\left(\frac{n\pi}{2}\right) \exp(jn\omega_0 t) \right] = \frac{4A}{\pi} \left[\sin(\omega_0 t) + \frac{1}{3} \sin(3\omega_0 t) + \frac{1}{5} \sin(5\omega_0 t) + \dots \right]$$

przebieg prostokątny jest więc sumą nieparzystych harmonicznych z malejącymi amplitudami

**PROGRAM ROZWOJOWY
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ**



The left plot shows a square wave $rect_T(t)$ with amplitude 1 and period $T=200$. The right plot shows its Fourier series approximation, with a dominant peak at ω_0 and smaller peaks at $3\omega_0, 5\omega_0, \dots$.

$$rect_T(t) = \frac{2A}{j\pi} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n} \sin^2\left(\frac{n\pi}{2}\right) \exp(jn\omega_0 t) \right] = \frac{4A}{\pi} \left[\sin(\omega_0 t) + \frac{1}{3} \sin(3\omega_0 t) + \frac{1}{5} \sin(5\omega_0 t) + \dots \right]$$

$$|F_n| = \frac{2A}{n\pi} \quad \text{dla } n \text{ nieparzystych}$$

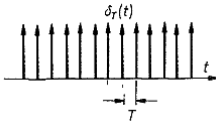
KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA INICJYWACYJNA

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

**PROGRAM ROZWOJOWY
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ**

Przykłady rozwinięć w SF II

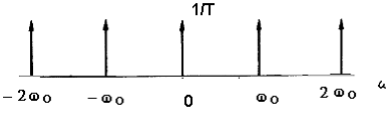
Ciąg $\delta_T(t)$:
$$\delta_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT)$$



współczynniki rozwinięcia:

$$F_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT) \exp(-jn\omega_0 t) dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta(t) \exp(-jn\omega_0 t) dt = \frac{1}{T}$$

$T = 2\pi/\omega_0$



rozwinięcie ciągu $\delta_T(t)$:

$$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n \exp(jn\omega_0 t) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \exp(jn\omega_0 t) = \frac{\omega_0}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \exp(jn\omega_0 t)$$

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA INICJYWACYJNA

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

Przekształcenie Fouriera

Proste i odwrotne przekształcenia Fouriera funkcji $f(t)$

$$F(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\}$$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \exp(-j\omega t) dt$$

$$f(t) \leftrightarrow F(\omega)$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) \exp(j\omega t) d\omega$$

(istnieją gdy $f(t)$ jest bezwzględnie całkowalna)

Zapis

$$F(\omega) = |F(\omega)| e^{j \arg(F(\omega))}$$

$|F(\omega)|$ - widmo gęstości amplitudy

$\arg(F(\omega))$ - widmo fazowe

Wybrane właściwości przekształcenia Fouriera I

Liniowość:

$$f_1(t) \leftrightarrow F_1(\omega), f_2(t) \leftrightarrow F_2(\omega) \quad \Rightarrow \quad Af_1(t) + Bf_2(t) \leftrightarrow AF_1(\omega) + BF_2(\omega)$$

Podobieństwo:

$$F\{f(at)\} = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

Symetria:

$$f(t) \leftrightarrow F(\omega) \quad \Rightarrow \quad F(t) \leftrightarrow 2\pi f(-\omega)$$



PROGRAM ROZWOJOWY
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

Wybrane właściwości przekształcenia Fouriera II

Transformata pochodnej $f(t)$

$$f(t) \leftrightarrow F(\omega) \quad \Rightarrow \quad f'(t) \leftrightarrow (j\omega)F(\omega) \quad , \quad f^n(t) \leftrightarrow (j\omega)^n F(\omega)$$

Przesunięcie w czasie

$$f(t) \leftrightarrow F(\omega) \quad \Rightarrow \quad f(t-t_0) \leftrightarrow \exp(-j\omega t_0)F(\omega)$$



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



PROGRAM ROZWOJOWY
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

Wybrane właściwości przekształcenia Fouriera III

Transformata splotu funkcji

$$f_1(t) \leftrightarrow F_1(\omega), \quad f_2(t) \leftrightarrow F_2(\omega)$$

**jest iloczynem transformat
splotanych funkcji!!!**

$$F\{f_1(t) * f_2(t)\} = F_1(\omega)F_2(\omega)$$

Transformata iloczynu funkcji

$$f_1(t) \leftrightarrow F_1(\omega), \quad f_2(t) \leftrightarrow F_2(\omega)$$

**jest splotem transformat
mnożonych funkcji!!!!!!**

$$F\{f_1(t)f_2(t)\} = \frac{1}{2\pi} F_1(\omega) * F_2(\omega)$$



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

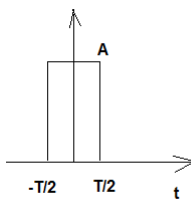
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



**PROGRAM ROZWOJOWY
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ**

Przykłady transformat Fouriera I

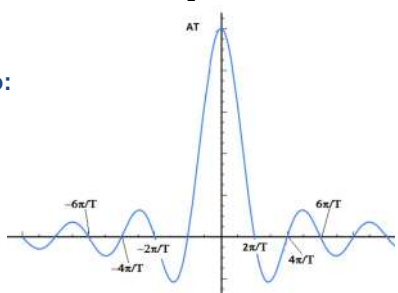
Sygnal prostokątny o czasie trwania T rect(T):



$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \text{rect}(T) \exp(-j\omega t) dt = \int_{-T/2}^{T/2} A \exp(-j\omega t) dt = -A \frac{1}{j\omega} \exp(-j\omega t) \Big|_{-T/2}^{T/2} =$$

$$= \frac{-A}{j\omega} [\exp(-j\omega T/2) - \exp(j\omega T/2)] = \frac{A}{j\omega} 2j \sin(\omega T/2) = AT \frac{\sin(\frac{\omega T}{2})}{\frac{\omega T}{2}} = AT \text{sinc}\left(\frac{\omega T}{2}\right)$$

TF sygnału prostokątnego:

$$F(\omega) = AT \text{sinc}\left(\frac{\omega T}{2}\right)$$


KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA INICJATYWA

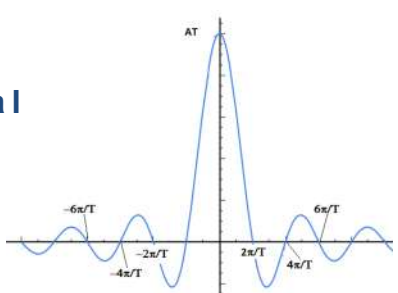
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

**PROGRAM ROZWOJOWY
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ**

Przykłady transformat Fouriera I

Sygnal prostokątny o czasie trwania T rect(T):

TF sygnału prostokątnego:

$$F(\omega) = AT \text{sinc}\left(\frac{\omega T}{2}\right)$$


Położenia zer – pierwsze dla $\omega T/2 = k\pi$; kolejne pulsacje wynoszą $\omega_k = 2k\pi/T = \pm 2\pi/T, \pm 4\pi/T, \pm 6\pi/T, \dots$

Położenia pierwszych ekstremów (listków bocznych) – dla $\omega T/2 = \pm 3\pi/2$; kolejne pulsacje wynoszą $\omega_m = 3\pi/2 + m\pi/T$ oraz $\omega_m = -3\pi/2 - m\pi/T$

Poziom listka głównego wykresu ciągłego – AT

Moduł pierwszego listka bocznego - $2AT/3\pi$ ($AT \text{sinc}(3\pi/2)$);

Stosunek modułów listka pierwszego i głównego – $2/3\pi = 0.21$

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA INICJATYWA

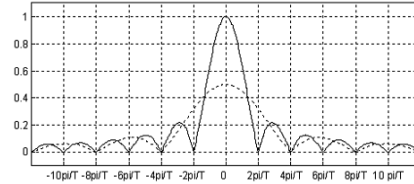
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

Przykłady transformat Fouriera I

Sygnal prostokątny o czasie trwania T rect(T):

$$\frac{|F(\omega)|}{AT} = \left| \text{sinc}\left(\frac{\omega T}{2}\right) \right|$$

Znormalizowany moduł TF, linia ciągła
– wynik dla czasu trwania sygnału T;
linia przerywana – czas trwania T/2.



Położenia pierwszych zer – dla $\omega T/2 = k\pi$; kolejne pulsacje wynoszą $\omega_k = 2k\pi/T = \pm 2\pi/T, \pm 4\pi/T, \pm 6\pi/T, \dots$

Położenia pierwszych ekstremów (listków bocznych) – dla $\omega T/2 = \pm 3\pi/2$; kolejne pulsacje wynoszą $\omega_m = 3\pi/2 + m\pi/T$ oraz $\omega_m = -3\pi/2 - m\pi/T$

Poziom listka głównego wykresu ciągłego – 1

Moduł pierwszego listka bocznego po normalizacji $2/3\pi$

Stosunek modułów listka pierwszego i głównego – $2/3\pi = 0.21$

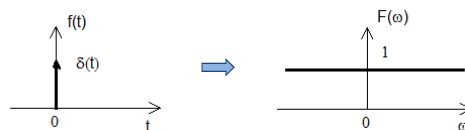
Przykłady transformat Fouriera II

Dystrybucja delta Diraca:

Właściwość dystrybucji: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t-t_0)dt = f(t_0) \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t)dt = f(0)$

Transformata dystrybucji:

$$F\{\delta(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\exp(-j\omega t)dt = 1$$



**PROGRAM ROZWOJOWY
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ**

Przykłady transformat Fouriera III

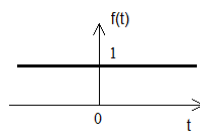
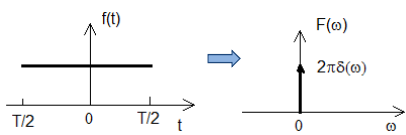
Funkcja stała

TF nie istnieje w myśl definicji – funkcja nie jest bezwzględnie całkowna. Można wyznaczyć wartość główną TF przy $T \rightarrow +\infty$:

$$F(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{T/2} \exp(-j\omega t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} T \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega T}{2}\right) =$$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty} 2\pi \frac{T}{2\pi} \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega T}{2}\right) = 2\pi \delta(\omega)$$

Definicja delty Diraca:

$$\delta(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{\pi} \operatorname{sinc}(kt)$$



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA INICJATYWY

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

**PROGRAM ROZWOJOWY
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ**

Przykłady transformat Fouriera IV

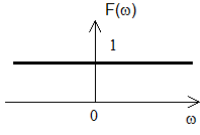
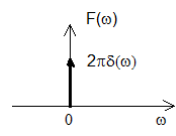
Funkcja stała

Właściwość symetrii TF !!!!! $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$ $F(t) \leftrightarrow 2\pi f(-\omega)$

Skoro TF delty Diraca jest funkcją stałą:

$$F\{\delta(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) \exp(-j\omega t) dt = 1$$

Na mocy właściwości symetrii TF transformata funkcji stałej ma postać delty Diraca:

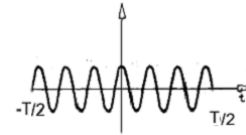
$$F(\omega) = 2\pi \delta(-\omega) = 2\pi \delta(\omega)$$



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA INICJATYWY

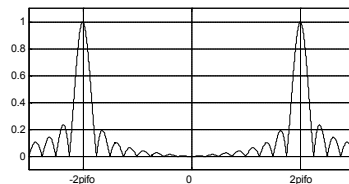
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

Przykłady transformat Fouriera V

Sygnał cosinusoidalny o ograniczonym czasie trwania (paczka) i jednostkowej amplitudzie



$$\begin{aligned}
 F(\omega) &= \int_{-T/2}^{T/2} \cos(\omega_0 t) \exp(-j\omega t) dt = \frac{1}{2} \int_{-T/2}^{T/2} [\exp(j\omega_0 t) + \exp(-j\omega_0 t)] \exp(-j\omega t) dt = \\
 &= \frac{1}{2} \int_{-T/2}^{T/2} [\exp(-j(\omega - \omega_0)t) + \exp(-j(\omega + \omega_0)t)] dt = \\
 &= \frac{1}{2} \frac{-1}{j(\omega - \omega_0)} \exp(-j(\omega - \omega_0)t) \Big|_{-T/2}^{T/2} + \frac{1}{2} \frac{-1}{j(\omega + \omega_0)} \exp(-j(\omega + \omega_0)t) \Big|_{-T/2}^{T/2} = \\
 &= \frac{T}{2} \left[\operatorname{sinc}\left(\frac{(\omega - \omega_0)T}{2}\right) + \operatorname{sinc}\left(\frac{(\omega + \omega_0)T}{2}\right) \right]
 \end{aligned}$$



Moduł TF paczki funkcji cosinus o czasie trwania T, oś Y znormalizowana do T/2

Przykłady transformat Fouriera VI

Sygnał cosinusoidalny

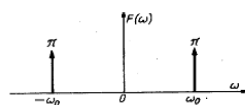
TF nie istnieje w sensie definicji, ponieważ funkcja cosinus nie jest bezwzględnie całkowalna. Można wyznaczyć wartość główną TF paczki fali cos przy $T \rightarrow +\infty$.

$$F(\omega) = \int_{-T/2}^{T/2} \cos(\omega_0 t) \exp(-j\omega t) dt = \frac{T}{2} \left[\operatorname{sinc}\left(\frac{(\omega - \omega_0)T}{2}\right) + \operatorname{sinc}\left(\frac{(\omega + \omega_0)T}{2}\right) \right]$$

Definicja delty Diraca:

$$\delta(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{\pi} \operatorname{sinc}(kt)$$

$$\begin{aligned}
 F\{\cos(\omega_0 t)\} &= \lim_{T \rightarrow \infty} \pi \left[\frac{T}{2\pi} \operatorname{sinc}\left(\frac{(\omega - \omega_0)T}{2}\right) + \frac{T}{2\pi} \operatorname{sinc}\left(\frac{(\omega + \omega_0)T}{2}\right) \right] = \\
 &= \pi [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]
 \end{aligned}$$



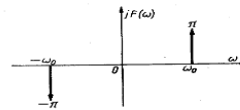
Przykłady transformat Fouriera VII

Sygnal sinusoidalny

TF nie istnieje w sensie definicji. Można wyznaczyć wartość główną TF paczki fali sin przy $T \rightarrow +\infty$. TF paczki fali sin:

$$F\{\sin(\omega_0 t)_T\} = j \frac{T}{2} \left[-\operatorname{sinc}\left(\frac{\omega - \omega_0}{2}\right) + \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega + \omega_0}{2}\right) \right]$$

$$F\{\sin(\omega_0 t)\} = j\pi[-\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$$



(na rysunku $jF(\omega)$!!)

Przykłady transformat Fouriera VIII

Zespolony sygnał wykładniczy

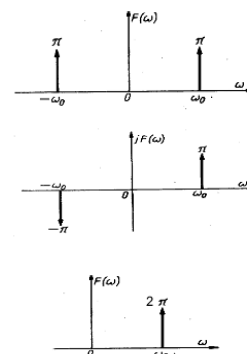
$$\exp(j\omega_0 t) = \cos(\omega_0 t) + j \sin(\omega_0 t)$$

Sygnal cosinusoidalny

Sygnal sinusoidalny - $jF\{\sin(\omega_0 t)\}$

$$F\{\exp(j\omega_0 t)\} = F\{\cos(\omega_0 t)\} + jF\{\sin(\omega_0 t)\} = \pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)] + j\pi[-\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)] = 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$$

Jest to tzw. sygnał analityczny – posiada niezerowe wartości widma tylko po jednej stronie początku układu



Przykłady transformat Fouriera IX

TF dowolnej funkcji okresowej nie istnieje w sensie definicji

Można taką funkcję rozwinąć w SF, potem przeprowadzić TF szeregu - ponieważ znamy TF zespolonej funkcji wykładniczej!!!

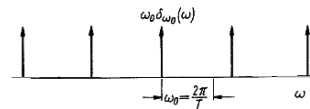
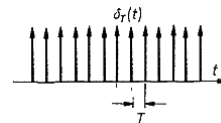
$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n \exp(jn\omega_0 t) \quad F(\omega) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n \delta(\omega - n\omega_0)$$

Ciąg dystrybucji Diraca
posiada następujące rozwinięcie w SF:

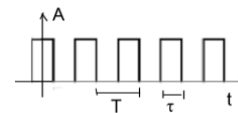
$$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n \exp(jn\omega_0 t) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \exp(jn\omega_0 t)$$

wobec tego jego TF jest równa:

$$F\{\delta_T(t)\} = \frac{2\pi}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - n\omega_0) = \omega_0 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - n\omega_0)$$



Przykłady transformat Fouriera X



Przebieg prostokątny $rect_T(t)$ (okres T , wypełnienie τ/T , amplituda A , $\omega_0 = 2\pi/T$):

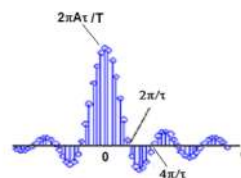
Sposób I

Wyznaczamy rozwinięcie w SF sygnału prostokątnego, a następnie TF rozwinięcia:

$$\begin{aligned} F\{rect_T(t)\} &= F\left\{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n \exp(jn\omega_0 t)\right\} = \\ &= \frac{2\pi A \tau}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \text{sinc}\left(\frac{n\omega_0 \tau}{2}\right) \delta(\omega - n\omega_0) = \\ &= \frac{2\pi A \tau}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \text{sinc}\left(\frac{n\pi\tau}{T}\right) \delta(\omega - n\omega_0) \end{aligned}$$

Współczynniki rozwinięcia SF

$$F_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \exp(-jn\omega_0 t) dt = \frac{A\tau}{T} \text{sinc}\left(\frac{n\omega_0 \tau}{2}\right)$$



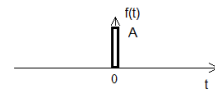
Przykłady transformat Fouriera XI

Przebieg prostokątny $rect_T(t)$ (okres T , wypełnienie τ/T , amplituda A , $\omega_0=2\pi/T$):

Sposób II

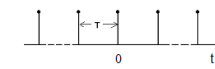
okresowy sygnał prostokątny jest wynikiem splotu okresowego ciągu delt Diraca o okresie T i okna prostokątnego o amplitudzie A i czasie trwania τ

$$rect_T(t) = rect(t) * \delta_T(t) = rect(t) * \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} rect(t - kT)$$



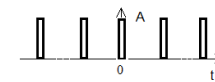
TF splotu funkcji jest iloczynem TF!

$$F\{f_1(t) * f_2(t)\} = F_1(\omega)F_2(\omega)$$



TF obu splatanych funkcji znamy!!!

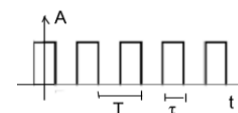
$$F\{\delta_T(t)\} = \frac{2\pi}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - n\omega_0)$$



$$F(\omega) = A\tau \text{sinc}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$



Przykłady transformat Fouriera XII



Przebieg prostokątny $rect_T(t)$ (okres T , wypełnienie τ/T , amplituda A , $\omega_0=2\pi/T$):

Sposób II

okresowy sygnał prostokątny jest wynikiem splotu okresowego ciągu delt Diraca o okresie T i okna prostokątnego o amplitudzie A i czasie trwania τ

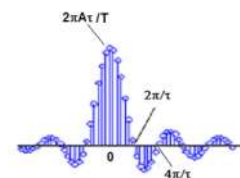
$$F\{\delta_T(t)\} = \frac{2\pi}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - n\omega_0)$$

$$F(\omega) = A\tau \text{sinc}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

$$F\{rect_T(t)\} = F\{\delta_T(t)\}F\{rect(\tau)\} = \left[\frac{2\pi}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - n\omega_0)\right]A\tau \text{sinc}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) =$$

$$= \frac{2\pi A\tau}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \text{sinc}\left(\frac{n\omega_0\tau}{2}\right)\delta(\omega - n\omega_0) =$$

$$= \frac{2\pi A\tau}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \text{sinc}\left(\frac{n\pi\tau}{T}\right)\delta(\omega - n\omega_0)$$



**PROGRAM ROZWOJOWY
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ**

Transformacja Fouriera – podsumowanie właściwości

Sygnal rzeczywisty parzysty	- TF rzeczywista, parzysta
przykład	$\cos(\omega_0 t), \text{rect}(t)$
Sygnal rzeczywisty nieparzysty	- TF urojona, nieparzysta
przykład	$\sin(\omega_0 t),$
Sygnal urojony parzysty	- TF urojona, parzysta
przykład	$j\cos(\omega_0 t)$
Sygnal urojony nieparzysty	- TF rzeczywista, nieparzysta
przykład	$j\sin(\omega_0 t)$

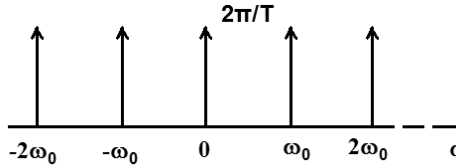
KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA INNOWACJI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

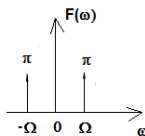
**PROGRAM ROZWOJOWY
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ**

Transformata Fouriera XIII

Iloczyn funkcji cosinusoidalnej o pulsacji Ω i ciągu delt Diraca o okresie $T=2\pi/\omega_0, \omega_0 \gg \Omega$



$$\delta_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT) \quad F\{\delta_T(t)\} = \frac{2\pi}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - n\omega_0)$$

$$F\{\cos(\Omega t)\} = \pi[\delta(\omega - \Omega) + \delta(\omega + \Omega)]$$


TF iloczynu funkcji jest splotem transformat!

Należy wyznaczyć splot TF funkcji cosinusoidalnej i TF ciągu delt Diraca!!!

$$F\{\cos(\Omega t)\delta_T(t)\} = \frac{1}{2\pi} F\{\cos(\Omega t)\} * F\{\delta_T(t)\}$$

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA INNOWACJI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

**PROGRAM ROZWOJOWY
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ**

Transformata Fouriera XIV

Iloczyn funkcji cosinusoidalnej o pulsacji Ω i ciągu delt Diraca o okresie $T=2\pi/\omega_0$, $\omega_0 > \Omega$

Splot transformat funkcji cosinusoidalnej i ciągu delt Diraca:

$$F\{\cos(\Omega t)\delta_T(t)\} = \frac{1}{2\pi} \pi\{\delta(\omega - \Omega) + \delta(\omega + \Omega)\} * \left[\frac{2\pi}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - n\omega_0)\right]$$

$$F\{\cos(\Omega t)\delta_T(t)\} = \frac{\pi}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - n\omega_0 \pm \Omega)$$

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA INWESTYCYJNA

**PROGRAM ROZWOJOWY
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ**

TF – tw. o próbkowaniu I

Iloczyn funkcji cosinusoidalnej o pulsacji Ω i ciągu delt Diraca o okresie $T=2\pi/\omega_0$, $\omega_0 > \Omega$

Transformata iloczynu funkcji cosinusoidalnej i ciągu delt Diraca:

$$F\{\cos(\Omega t)\delta_T(t)\} = \frac{\pi}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - n\omega_0 \pm \Omega)$$

Transformata iloczynu dowolnej funkcji i ciągu delt Diraca:

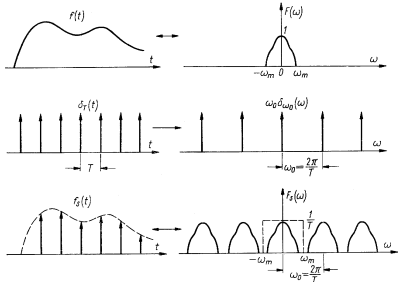
$$F\{f(t)\delta_T(t)\} = \frac{1}{2\pi} F(\omega) * F\{\delta_T(t)\} = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F(\omega - n\omega_0)$$

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA INWESTYCYJNA

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

**PROGRAM ROZWOJOWY
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ**

TF – tw. o próbkowaniu II

$$F\{f(t)\delta_T(t)\} = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F(\omega - n\omega_0)$$


Widmo sygnału spróbkowanego jest okresowe z okresem równym częstotliwości (pulsacji) próbkowania!!

Jak wynika z rysunku obok, aby kolejne repliki widm nie nałożyły się na siebie, należy spełnić warunek:

$f_0 \geq 2f_{\max}$ $\omega_0 \geq 2\omega_{\max}$!!!!!

Jest to tzw. twierdzenie o próbkowaniu (tw. Shannona, warunek Nyquista), które wymaga, by sygnał był próbkowany z częstotliwością/pulsacją conajmniej równą podwójnej wartości maksymalnej częstotliwości/pulsacji widma sygnału. W praktyce warunek ten musi być spełniony z nadmiarem.

Jest to stwierdzenie fundamentalne dla cyfrowego przetwarzania sygnałów. Jego niespełnienie skutkuje niemożnością odtworzenia sygnału ciągłego na podstawie jego próbek.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA AGENCJA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

**PROGRAM ROZWOJOWY
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ**

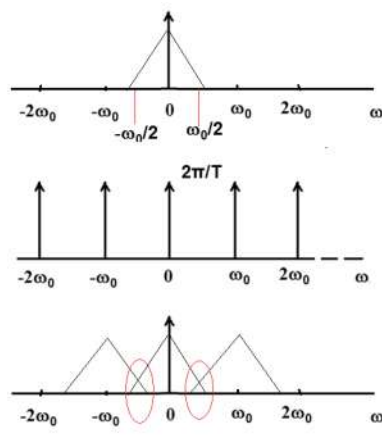
TF – tw. o próbkowaniu III

$$F\{f(t)\delta_T(t)\} = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F(\omega - n\omega_0)$$

Twierdzenie o próbkowaniu wymaga, by sygnał był próbkowany z częstotliwością/pulsacją conajmniej równą podwójnej wartości maksymalnej częstotliwości/pulsacji widma sygnału.


$f_0 \geq 2f_{\max}$ $\omega_0 \geq 2\omega_{\max}$

Niespełnienie tego warunku skutkuje nakładaniem się widm (tzw. „aliasing” – patrz obszary w czerwonych elipsach obok) i niemożnością odtworzenia sygnału czasu ciągłego na podstawie jego próbek.





KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA AGENCJA SPÓJNOŚCI


UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

 **PROGRAM ROZWOJOWY
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ**

Energia, moc, widmowa gęstość energii i mocy

 **KAPITAŁ LUDZKI**
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

 **UNIA EUROPEJSKA**
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

 **PROGRAM ROZWOJOWY
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ**

Energia, moc, widmowa gęstość energii i mocy I


Sygnaly o skończonym czasie trwania i skończonej energii w skończonym przedziale czasu


sygnaly nieokresowe, bezwzględna całkowalność, moc średnia równa zero, energia sygnału E określona jest przez zależność (tw. Parsevala):

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega$$

Zastosowanie przekształcenia Fouriera

$|F(\omega)|^2$ - widmowa gęstość energii (1Ω)

 **KAPITAŁ LUDZKI**
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

 **UNIA EUROPEJSKA**
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Energia, moc, widmowa gęstość energii i mocy II

Sygnały okresowe

Rozwinięcie w szereg Fouriera T- okres sygnału $F_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \exp(-jn\omega t) dt$

$|F_n|$ - widmo amplitudy

$|F_n|^2$ - widmo mocy

moc sygnału P (tw. Parsewala)

$$P = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f^2(t) dt = \sum_{-\infty}^{+\infty} |F_n|^2$$

(energia tracona w jednostce czasu w oporności 1Ω –
związki z elektrotechniką)

Energia, moc, widmowa gęstość energii i mocy III

Sygnały o nieskończonym czasie trwania i nieskończonej energii w nieskończonym przedziale czasu

Sygnały o nieskończonym czasie trwania (np. okresowe) - energia nieskończona w nieskończonym przedziale, TF z definicji nie istnieje (funkcja nie jest bezwzględnie całkowalna), można określić moc średnią P (uśrednienie za czas obserwacji T):

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f^2(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|F_T(\omega)|^2}{T} d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\omega) d\omega$$

$\Phi(\omega)$ - widmowa gęstość mocy:

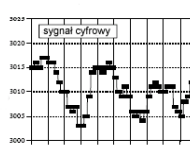
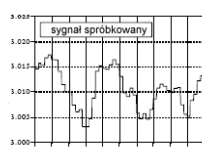
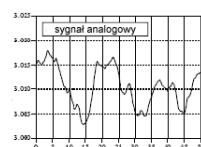
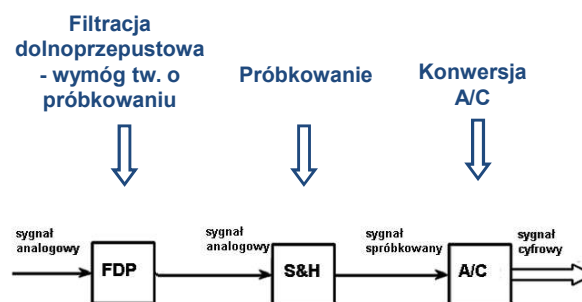
$$\Phi(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|F_T(\omega)|^2}{T}$$

w praktyce - ze względu na ograniczoną długość rekordu danych T

$$\Phi(\omega) = \frac{|F_T(\omega)|^2}{T}$$

Dostosowanie narzędzi matematycznych do potrzeb praktycznej analizy sygnałów

Podstawowe operacje na sygnale, poprzedzające przetwarzanie cyfrowe



Narzędzia analityczne a uwarunkowania praktycznej analizy sygnałów I

Rozważania analityczne – przekształcenie Fouriera - w przedziale nieskończonym. Sygnały są ciągle (na ogół) i mogą istnieć dla wszystkich t (także dla ujemnych).

W praktyce – rejestrowane sygnały są przyczynowe (istnieją dla $t > 0$), zebrane próbki reprezentują skończony (ograniczony w czasie) fragment sygnału, (który w ogólności może istnieć dłużej – zarówno przed rozpoczęciem jak i po zakończeniu procesu próbkowania).

Oznacza to że symetryczne okno prostokątne z rozważań analitycznych zostaje przesunięte do początku układu $f(t-t_0) \leftrightarrow \exp(-j\omega t_0)F(\omega)$

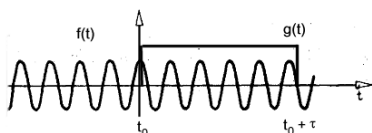
Ograniczony sygnał - wprowadzenie ograniczeń czasowych pod całkę Fouriera – widmo chwilowe :

$$F(\omega, t_0) = \int_{t_0}^{t_0 + \tau} f(t) \exp(-j\omega t) dt$$

Narzędzia analityczne a uwarunkowania praktycznej analizy sygnałów II

Widmo chwilowe

Wprowadzenie ograniczeń czasowych pod całkę Fouriera jest równoznaczne z przemnożeniem poddawanej analizie funkcji $f(t)$ przez funkcję $g(t)$, różną od zera w przedziale $\langle t_0, t_0 + \tau \rangle$ i równą zero poza tym przedziałem, np. okno prostokątne:



$$F(\omega, t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t) \exp(-j\omega t) dt$$

oznacza to, że wyznaczamy TF nie funkcji $f(t)$, ale iloczynu $f(t)g(t) \leftrightarrow F(\omega) * G(\omega)$. Wyznaczone w ten sposób widmo będzie mieć właściwości określone przez operacje splotu i właściwości obu widm, a więc także przez właściwości funkcji $g(t)$, zwanej często oknem lub funkcją granic.



**PROGRAM ROZWOJOWY
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ**

Narzędzia analityczne a uwarunkowania praktycznej analizy sygnałów III

Przetwarzanie cyfrowe – reprezentacja dyskretna zarówno w dziedzinie czasu, jak i częstotliwości

Sygnały przetwarzane są po operacji próbkowania – ich widma są okresowe!

Widma sygnałów są wyznaczane dla ograniczonego zbioru punktów na osi częstotliwości, a sygnały mają ograniczony czas trwania – SF czy TF?? Modyfikacje obu metod.

(inne problemy – np. wpływ kwantyzacji i skończona długość słowa)



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



**PROGRAM ROZWOJOWY
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ**

Przekształcenie Fouriera sygnału spróbkowanego i szereg Fouriera dla sygnałów dyskretnych



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



Przekształcenie Fouriera sygnału próbkowanego

Sygnał próbkowany (Δt – okres próbkowania) $f_s(t) = f(t) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - n\Delta t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(t - n\Delta t)$

Przekształcenie: $F\{f_s(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} f_s(t) \exp(-j\omega t) dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n\Delta t) \exp(-jn\Omega)$

Stosowany jest także zapis $F(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n\Delta t) \exp(-jn\Omega)$

gdzie: $\Omega = \omega \Delta t = \omega / f_s = 2\pi f / f_s$ $f_s = 1/\Delta t$ – częstotliwość próbkowania.

Transformata jest okresowa z okresem 2π !!!

$F(\omega)$ – TF sygnału ciągłego,
 $F(e^{j\Omega})$, $F(e^{j\omega})$ – TF sygnału próbkowanego, okresowa z okresem 2π

Odwrotne przekształcenie Fouriera sygnału próbkowanego

Przekształcenie odwrotne:

$$f(m\Delta t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(e^{j\Omega}) \exp(jm\Omega) d\Omega$$

Przekształcenie proste:

$$F(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n\Delta t) \exp(-jn\Omega)$$

$$f_s(t) = f(t) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - n\Delta t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(t - n\Delta t)$$

**PROGRAM ROZWOJOWY
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ**

Szereg Fouriera dla sygnałów dyskretnych

(czyli Dyskretna Transformacja Fouriera DTF)

Dysponujemy N próbkami sygnału, a więc granice sumowania w równaniu TF stają się skończone:

$$F(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n) \exp(-jn\Omega) \quad \Longleftrightarrow \quad F(e^{j\Omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} f(n) \exp(-jn\Omega)$$


Współczynniki SF dla sygnałów ciągłych: $F_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \exp(-jk\omega_0 t) dt$
(uwaga zmiana indeksu z n na k , aby odróżnić indeksowanie próbek i wartości transformaty)


N próbek okresowego (T) sygnału $f(n)$, okres próbkowania $1/\Delta t$, $N=T/\Delta t$, $\omega_0=2\pi/T=2\pi/(N\Delta t)$, całkę wyznaczamy metodą prostokątów ($dt \leftrightarrow \Delta t$).
Współczynniki rozwinięcia dla sygnałów dyskretnych:

$$F_k = \frac{1}{N\Delta t} \sum_{n=0}^{N-1} f(n\Delta t) \exp(-jk\omega_0(n\Delta t))\Delta t = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(n\Delta t) \exp(-j \frac{2\pi k}{N\Delta t} (n\Delta t)) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(n) \exp(-j \frac{2\pi nk}{N})$$

przekształcenie odwrotne

$$f(n) = \sum_{k=0}^{N-1} F_k \exp(j \frac{2\pi kn}{N})$$

 **KAPITAŁ LUDZKI**
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

 **UNIA EUROPEJSKA**
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

**PROGRAM ROZWOJOWY
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ**

Szereg Fouriera dla sygnałów dyskretnych

(czyli Dyskretna Transformacja Fouriera DTF)


Najczęściej stosowana jest notacja:


$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \exp(-j \frac{2\pi nk}{N}) \quad x_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_k \exp(j \frac{2\pi kn}{N})$$

gdzie x_n - ciąg próbek sygnału, X_k - ciąg wartości DTF (współczynniki SF),
 $k, n=0, 1, 2, \dots, N-1$,

wprowadza się także oznaczenie czynnika $\exp(j2\pi/N)$ przez W_N - nosi on nazwę czynnika rotującego

$$W_N = \exp(j \frac{2\pi}{N}) \quad X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \exp(-j \frac{2\pi nk}{N}) = \sum_{n=0}^{N-1} x_n W_N^{-kn}$$

 **KAPITAŁ LUDZKI**
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

 **UNIA EUROPEJSKA**
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY



PROGRAM ROZWOJOWY
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

Szereg Fouriera dla sygnałów dyskretnych

argument funkcji wykładniczej z TF czasu ciągłego
przyjmuje następującą postać:

$$F_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \exp(-jk\omega_0 t) dt$$

$$jk\omega_0 t = jk \frac{2\pi}{T} n\Delta t = jk \frac{2\pi}{N\Delta t} n\Delta t = j \frac{2\pi nk}{N}$$

gdzie: N liczba próbek $x(n)$, okres sygnału T, okres próbkowania $\Delta t=1/f_s$, $N=T/\Delta t$, $\omega_0=2\pi/T=2\pi/(N\Delta t)$, $f_0=1/T$, momenty położenia próbek $t=n\Delta t$. W powyższej formule „znika” zarówno wartość częstotliwości próbkowania, jak i czasu, pozostają tylko indeksy próbek sygnału i wartości DTF.

Na podstawie wyniku analizy widmowej sygnałów dyskretnych możemy mówić wyłącznie o relacji częstotliwości sygnału do częstotliwości próbkowania!!!



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI



UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



PROGRAM ROZWOJOWY
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

Właściwości DTF I

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \exp(-j \frac{2\pi nk}{N})$$

1. Liniowość

2. Okresowość z okresem N

3. Symetria dla rzeczywistych wartości x_n

$$X_k = X_{N-k}^*$$

4. DTF iloczynu dwóch ciągów próbek – splot DFT tych ciągów

Splot dwóch ciągów $z_n = x_n * y_n$

$$z_n = x_n * y_n = \sum_{k=0}^{N-1} x_k y_{n-k}$$

5. DTF splotu ciągów – iloczyn DTF tych ciągów



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI



UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Właściwości DTF II

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \exp(-j \frac{2\pi nk}{N})$$

6. Przesunięcie ciągu o n_0 próbek: $x(n-n_0) \leftrightarrow X_k \exp(-j2\pi kn_0/N)$

7. Rozdzielczość częstotliwościowa (odległość między wartościami DTF):

wartości DTF wyznaczone są w punktach f_k odpowiadającym rzeczywistym wartościom f

$$f_k = \frac{k}{N} \rightarrow f_s \frac{k}{N}$$

odstęp między kolejnymi wartościami wynosi $1/N$

odpowiada pewnej różnicy częstotliwości

$$f_{k+1} - f_k = \frac{1}{N} \rightarrow f_s \frac{1}{N}$$

Odstęp czasowy między kolejnymi próbkami wynosi $1/f_s$ (f_s - częstotliwość próbkowania), ciąg N próbek poddawany DTF odpowiada czasowi $T=N/f_s$, a więc rozdzielczość częstotliwościowa jest odwrotnie proporcjonalna do T : $\Delta f = f_s/N = 1/T$;

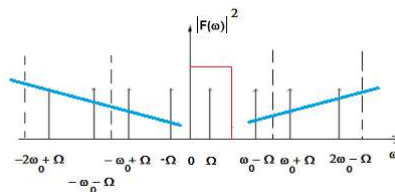
iloczyn rozdzielczości częstotliwościowej i czasu trwania sygnału jest stały $T\Delta f=1$!

Najczęściej wykorzystywana w analizie widmowej wielkość - widmowa gęstość mocy

$$\Phi(\omega) = |F(\omega)|^2/T$$

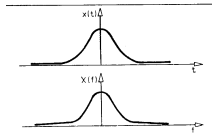
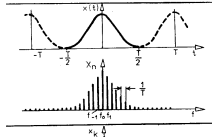
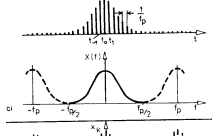
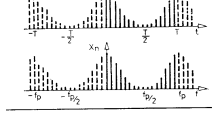
Widmowa gęstość mocy jest wielkością parzystą i wystarczy przedstawić ją w przedziale 0 - $f_s/2$


Systemy (programy) naukowe/komercyjne do analizy sygnałów przedstawiają w taki właśnie sposób wynik analizy widmowej, często podając przedział jako 0 - $1/2$ lub 0 - π , co wynika z okresowych właściwości narzędzi analizy widmowej dla sygnałów czasu dyskretnego (spróbkowanych).




**PROGRAM ROZWOJOWY
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ**

Szeregi i przekształcenia Fouriera - podsumowanie

Sygnal ciągły skończony TF - ciągła, nieokresowa	
Sygnal ciągły okresowy SF - dyskretny, nieokresowy	
Sygnal dyskretny (próbkowany) nieskończony transformata - ciągła, okresowa	
Sygnal dyskretny (próbkowany) skończony (okresowy) dyskretny szereg Fouriera DFT - dyskretny, okresowy	


 KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI


UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY 

**PROGRAM ROZWOJOWY
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ**

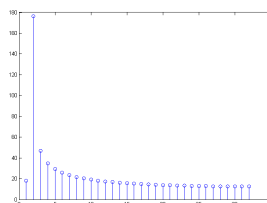
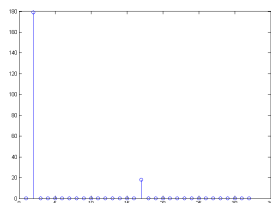
Dyskretna analiza widmowa

przeciek widma
funkcje granic
zero padding

 KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY 

Analiza widmowa – przeciek widma



$$1000 \cdot \cos(2\pi \cdot 1 \cdot (t-1)/64) + 10 \cdot \cos(2\pi \cdot (t-1)/4); \quad 1000 \cdot \cos(2\pi \cdot 1.05 \cdot (t-1)/64) + 10 \cdot \cos(2\pi \cdot (t-1)/4);$$

$$t=1:1280;$$

DTF dla $N=64$ (na rysunku - pierwiastek kwadratowy modułu DTF)

Niewielka zmiana relacji f/f_s w sposób drastyczny zmieniła wynik analizy widmowej – widmo sygnału sinusoidalnego o słabszej amplitudzie przestało być widoczne, pojawiło się wiele prążków nie posiadających interpretacji fizycznej.

Analiza widmowa – przeciek widma

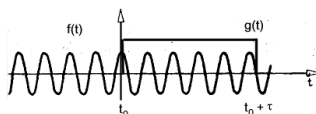
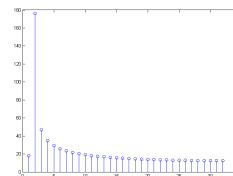
$$f(t) = 1000 \cdot \cos(2\pi \cdot 1.05 \cdot (t-1)/64) + 10 \cdot \cos(2\pi \cdot (t-1)/64);$$

$$t=1:1280;$$

DTF dla $N=64$ (na rysunku przedstawiony jest pierwiastek kwadratowy modułu DTF)

Mimo że w sygnale występują tylko dwie składowe – widmo sygnału sinusoidalnego o słabszej amplitudzie nie jest widoczne, występuje natomiast wiele prążków nie posiadających interpretacji fizycznej.

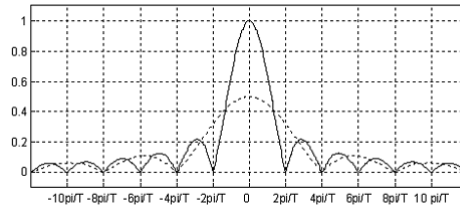
Ze względu na inherentną obecność okna prostokątnego wynik przekształcenia jest spłotem transformaty nieograniczonego w czasie sygnału x oraz transformaty tego okna. Efekt – tzw. przeciek widma i jego konsekwencje w postaci maskowania składowych o niskich amplitudach.



Analiza widmowa – przeciek widma

Sygnał prostokątny o czasie trwania T $\text{rect}(T)$:

$$F(\omega) = AT \sin c\left(\frac{\omega T}{2}\right)$$



Moduł TF okna prostokątnego posiada listki boczne!

Stosunek modułów listka pierwszego i głównego – $2/3\pi=0.21$

Listki boczne - przyczyna przecieku widma!

Analiza widmowa – przeciek widma

Zakładamy, że DTF poddany została pewna liczba próbek sygnału cosinusoidalnego.

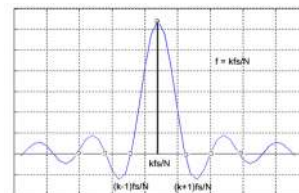
A.

Częstotliwość sygnału wynosi $f = kf_s/N$ i maksimum DTF (która ma obwiednię $\text{sinc}(\omega T/2)$) wypada w tym punkcie. Dla pozostałych f_k (określonych powyżej), wartości DTF są równe zero, ponieważ kolejne miejsca zerowe funkcji sinc są odległe od maksimum właśnie o f_s/N , czyli trafiają dokładnie w punkty na osi częstotliwości, dla których wyznaczamy wartości DTF.

$$f_k = \frac{k}{N} \rightarrow f_s \frac{k}{N}$$

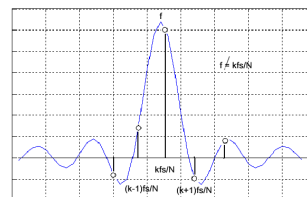
$$F(\omega) = AT \sin c\left(\frac{\omega T}{2}\right)$$

$$T = N/f_s, \quad 1/T = f_s/N$$



B.

Częstotliwość sygnału jest różna od $f = kf_s/N$ i maksimum DTF (która ma obwiednię $\text{sinc}(\omega T/2)$) wypada w między punktami, dla których obliczane są wartości DTF. W konsekwencji dla pozostałych f_k wartości DTF przybierają się różne od zera.

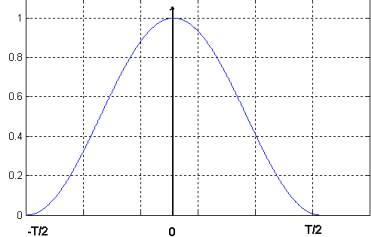


**PROGRAM ROZWOJOWY
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ**

Analiza widmowa – funkcje granic

Okno Hanna: $w(t) = \cos^2\left(\frac{\pi t}{T}\right)$
 $t \in (-T/2, T/2)$

Konstrukcja okna Hanna:

$$w(t) = \cos^2\left(\frac{\pi t}{T}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right)$$


KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

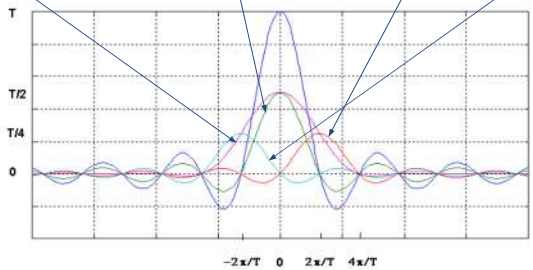
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

**PROGRAM ROZWOJOWY
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ**

Analiza widmowa – funkcje granic

Transformata Fouriera okna Hanna $w(t) = \cos^2\left(\frac{\pi t}{T}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right)$

TF okna Hanna jest sumą transformat okna prostokątnego o amplitudzie $\frac{1}{2}$ oraz takiego samego okna pomnożonego przez funkcję $\cos(\omega_0 t)$, $\omega_0 = 2\pi/T$ – wykorzystujemy tw. o modulacji lub tw. o transformacie iloczynu funkcji:

$$F\left\{w(t)\right\} = F\left\{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right)\right\} = \frac{T}{2} \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega T}{2}\right) + \frac{T}{4} \operatorname{sinc}\left(\frac{(\omega - \omega_0) T}{2}\right) + \frac{T}{4} \operatorname{sinc}\left(\frac{(\omega + \omega_0) T}{2}\right)$$


$\omega_0 = 2\pi/T$

kolor granatowy
– TF okna
prostokątnego o
amplitudzie 1

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

