PROGRAM ROZWOJOWY POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

PRZETWARZANIE SYGNAŁÓW

SEMESTR V

Człowiek- najlepsza inwestycja

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

PROGRAM ROZWOJOWY POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

Wykład III

Procesy stochastyczne

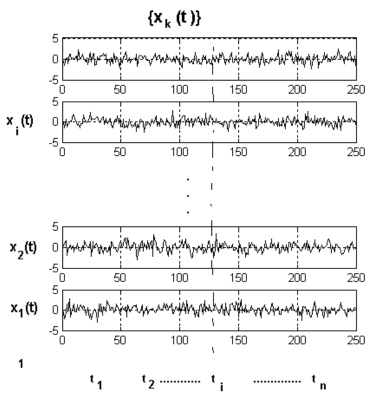
Elementy estymacji parametrów procesów losowych

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Procesy stochastyczne

Procesy losowe (stochastyczne)



$\{x_k(t)\}$	rodzina funkcji zmiennej losowej i czasu – proces stochastyczny
$x_k(t)$	k-ta realizacja procesu - funkcja czasu dla pewnej wartości zmiennej losowej (wyniku zdarzenia losowego)
$X(t_i)$	wartości procesu dla ustalonego czasu są wartościami zmiennej losowej

Zmienna losowa – funkcja określona na zbiorze zdarzeń i przyjmująca wartości rzeczywiste (z określonym prawdopodobieństwem)

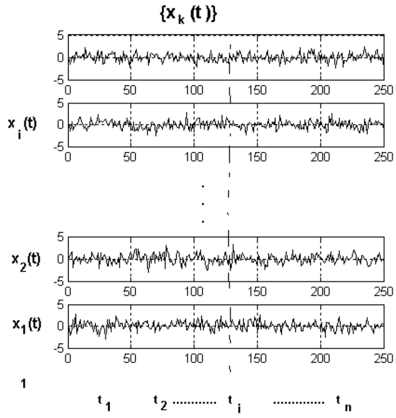
PROGRAM ROZWOJOWY
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

Opis procesu stochastycznego

Właściwości statystyczne procesu w pewnym przedziale czasu są określone, jeśli dla tego przedziału (lub jego podzbioru) znany jest rozkład łączny prawdopodobieństwa zmiennych losowych $X(t_1)$, $X(t_2)$,... $X(t_n)$.

Taki rozkład łączny prawdopodobieństwa nazywamy gęstością procesu $p(x_1,t_1;x_2,t_2;\ldots x_i,t_i\ldots;x_n,t_n)$. Rozkład ten określa prawdopodobieństwo, z jakim zmienna losowa X przyjmuje wartości z przedziału $(x_i,\ x_i+\Delta x)$ dla każdego t_n.

Wyznaczenie tego rozkładu wymaga dysponowania zbiorem wszystkich realizacji procesu i może być bardzo trudne do przeprowadzenia (nierealizowalne) w warunkach pomiarów fizycznych.



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

PROGRAM ROZWOJOWY
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

Opis sygnałów losowych (stochastycznych)

Sygnał losowy

- wartość średnia i średniokwadratowa, wariancja (momenty)
- rozkład prawdopodobieństwa - ocena przedziału wartości przyjmowanych przez proces, wnioskowanie o właściwościach rozkładu amplitudy
- funkcja i współczynnik korelacji i autokorelacji - wykrywanie podobnych/ powtarzających się (okresowych) struktur w sygnale, pomiar czasu opóźnienia
- widmowa gęstość mocy - ocena właściwości sygnału, ocena właściwości toru sygnałowego, optymalizacja filtracji

Para sygnałów losowych:

- funkcja i współczynnik korelacji wzajemnej

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

Wielkości charakteryzujące proces stochastyczny I

nieograniczona liczba realizacji procesu, x(t) – wartości procesu, E – operator wyznaczania wartości oczekiwanej, m – wartość średnia procesu, p(x,t) – jednowymiarowa funkcja gęstości prawdopodobieństwa, ew. funkcja czasu

wartość średnia (pierwszy moment zwykły) $m(t) = E[x(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)p(x,t)dx$

wartość średniokwadratowa (2-gi moment zwykły) $m_2(t) = E[x^2(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t)p(x,t)dx$

wariancja (drugi moment centralny) $s(t) = \mu_2(t) = E[(x(t)-m(t))^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} [x(t)-m(t)]^2 p(x,t)dx$

Wielkości te mogą być funkcjami czasu !!!!

Wielkości charakteryzujące proces stochastyczny II

nieograniczona liczba realizacji procesu, x – wartości procesu, E – operator wyznaczania wartości oczekiwanej, m – wartość średnia procesu, p – dwuwymiarowa funkcja gęstości prawdopodobieństwa, ew. funkcja czasu

funkcja autokorelacji $R(t_1,t_2) = E[x(t_1)x(t_2)] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x(t_1)x(t_2)p(x_1,x_2,t_1,t_2)dx_1dx_2$

często stosuje się zapis (τ - opóźnienie) $R(t_1,t_2) = R(t_1,t_1+\tau) = E[x(t_1)x(t_1,t_1+\tau)]$

funkcja autokowariancji

$$C_{xx}(t_1,t_2) = E[(x(t_1)-m(t_1))(x(t_2)-m(t_2))] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} (x(t_1)-m(t_1))(x(t_2)-m(t_2))p(x_1,x_2,t_1,t_2)dx_1dx_2$$

Wielkości te mogą być funkcjami czasu !!!!

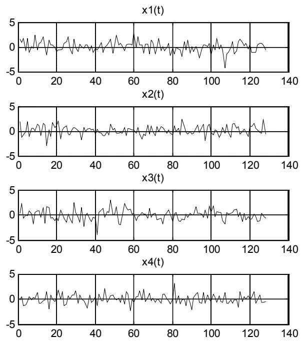
PROGRAM ROZWOJOWY POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

Proces stacjonarny

Jeśli dla dowolnego τ rozkład łączny zmiennych losowych $X(t_1)$, $X(t_2)$,... $X(t_n)$ jest taki sam jak rozkład łączny zmiennych $X(t_1 + \tau)$, $X(t_2 + \tau)$,... $X(t_n + \tau)$, proces jest słabo stacjonarny (stacjonarny w szerszym sensie).

Wtedy m i R nie są funkcjami t;
R jest jedynie funkcją τ .

Jeśli wszystkie momenty procesu nie zależą od czasu – proces jest ściśle stacjonarny (stacjonarny w węższym sensie).



t_1 t_2 t_3 t_4 t_5

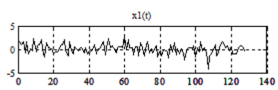
KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

PROGRAM ROZWOJOWY POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

Proces ergodyczny

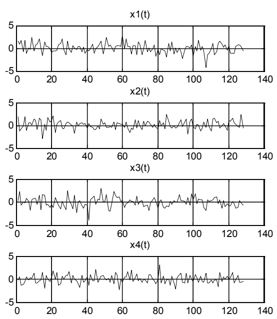
Momenty i funkcja korelacji pojedynczej realizacji $x_k(t)$ słabo stacjonarnego procesu:



$$m_x = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T x_k(t)dt$$

$$s = E[x_k(t) - m_x]^2 = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T [x_k(t) - m_x]^2 dt$$

$$R_{xx}(\tau, k) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T x_k(t)x_k(t+\tau)dt$$



Jeśli wyniki uzyskane w powyższy sposób są identyczne z uzyskanymi dla zbioru realizacji – proces jest ergodyczny. Większość obserwowanych stacjonarnych procesów fizycznych to procesy ergodyczne.

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

Proces gaussowski (normalny) I

Rozkład zmiennej losowej normalnej opisany jest zależnością:

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-\alpha)^2}{2\sigma^2}\right)$$

(α -wartość średnia, σ – odchylenie standardowe);

Centralne twierdzenie graniczne – jeśli zmienne losowe są niezależne i mają takie same rozkłady, wartości oczekiwane i skończone wariancje, rozkład ich sumy po wystandaryzowaniu (odjęciu wartości średniej i podzieleniu przez odchylenie standardowe) dąży do rozkładu normalnego, gdy liczba wartości tych zmiennych dąży do nieskończoności.

Twierdzenie to uzasadnia przybliżanie rozkładów wielkości spotykanych w fizyce czy technice rozkładem normalnym.

Proces gaussowski (normalny) II

Model procesu gaussowskiego jest bardzo często wykorzystywany w technice pomiarowej, telekomunikacji – np. suma zakłóceń, powodowanych przez różne czynniki o nieznanych rozkładach.

Słabo stacjonarne procesy normalne spełniające warunek :

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T}^{T} |C_{xx}(\tau)| d\tau = 0$$

są ergodyczne

(Cxx - funkcja autokowariancji)

Będziemy przyjmować, że mamy do czynienia z takimi procesami.

PROGRAM ROZWOJOWY POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

Wyznaczanie parametrów procesu ergodycznego I

Parametry procesu losowego ergodycznego – obliczane dla pojedynczej realizacji $x_k(t)$:

Wartość oczekiwana (średnia)

$$m_x = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T x_k(t)dt$$

Wariancja:

(kwadrat wartości średniokwadratowej składowej zmiennej procesu)

$$s = E[x_k(t) - m_x]^2 = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T [x_k(t) - m_x]^2 dt$$

Funkcja autokowariancji

$$C_{xx}(\tau) = E[(x(t_1) - m)(x(t_1+\tau) - m)] = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T (x(t_1) - m)(x(t_1+\tau) - m)dt$$

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

PROGRAM ROZWOJOWY POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

Wyznaczanie parametrów procesu ergodycznego II

Parametry procesu losowego ergodycznego – obliczane dla pojedynczej realizacji:

Funkcja autokorelacji

$$R_{xx}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T x(t)x(t+\tau)dt$$

Widmowa gęstość mocy

WGM jest transformatą Fouriera funkcji autokorelacji procesu (tw. Wienera-Chinczyna):

$$G_{xx}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{xx}(t)\exp(-j2\pi ft)dt$$

$G_{xx}(f)$=TF{$R_{xx}(t)$}

Funkcja autokorelacji jest odwrotną transformatą Fouriera WGM procesu:

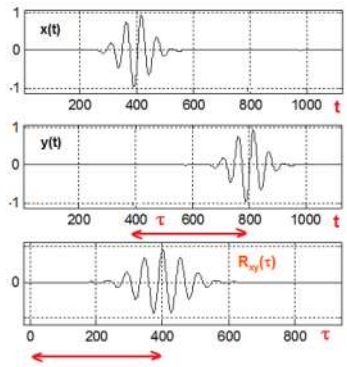
$$R_{xx}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G_{xx}(f)\exp(j2\pi ft)df$$

$R_{xx}(t)$=TF^{-1}{$G_{xx}(f)$}

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

Funkcja korelacji wzajemnej



Jest to wartość oczekiwana iloczynu sygnałów (inaczej ich iloczyn skalarny), która stanowi miarę podobieństwa tych sygnałów. Argumentem funkcji korelacji jest czas τ (inaczej opóźnienie), o który przesunięto analizowane sygnały.

$$R_{xy}(\tau) = E[x(t)y(t+\tau)]$$

$$R_{xy}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T x(t)y(t+\tau)dt$$

Uwaga!

Ponieważ funkcja korelacji wzajemnej jest w myśl definicji wartością średnią iloczynu wartości sygnałów x(t) i y(t+τ), usytuowanych w punktach t i (t+τ), uśrednienie powinno zostać przeprowadzone dla nieskończonej liczby tych iloczynów wyznaczonych dla danego τ dla różnych t (całej osi czasu). Stąd dążący do nieskończoności przedział całkowania - w pomiarach fizycznych (praktycznych) warunek ten nie jest realizowalny.

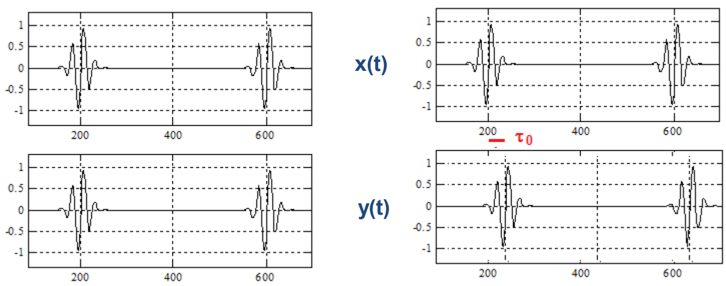
PROGRAM ROZWOJOWY
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

Funkcja korelacji wzajemnej

Jest to wartość oczekiwana iloczynu sygnałów, która stanowi miarę podobieństwa tych sygnałów. Argumentem funkcji korelacji jest czas τ (inaczej opóźnienie), o który przesunięto względem siebie analizowane sygnały.

Sygnały rzeczywiste x(t) i y(t)

$$R_{xy}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T x(t)y(t+\tau)dt$$



Sygnały identyczne - wysoka wartość funkcji korelacji wzajemnej dla τ =0, T - czas trwania sygnału.

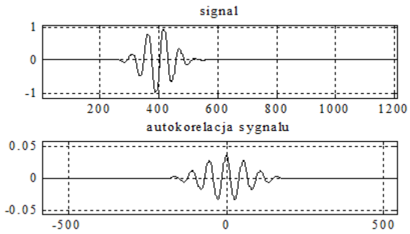
Sygnały przesunięte - niska wartość funkcji korelacji wzajemnej dla τ = 0, wysoka dla pewnej wartości τ_0;

PROGRAM ROZWOJOWY POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

Funkcja autokorelacji (korelacji własnej)

Sygnał rzeczywisty x(t)

$$R_{xx}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T x(t)x(t+\tau)dt$$



Właściwości:

1. $R_{xx}(0) \geq |R_{xx}(\tau)|$ dla $\tau \neq 0$
2. $R_{xx}(\tau) = R_{xx}(-\tau)$ funkcja rzeczywista, parzysta
3. $R_{xx}(0)$ kwadrat wartości skutecznej – drugi moment zwykły (wariancja w przypadku zerowej wartości średniej sygnału)

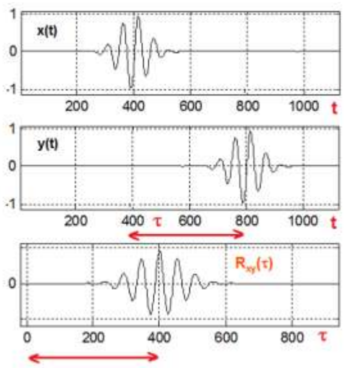
KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

PROGRAM ROZWOJOWY POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

Funkcja korelacji wzajemnej

Jest to wartość oczekiwana iloczynu sygnałów, która stanowi miarę podobieństwa tych sygnałów. Argumentem funkcji korelacji jest czas τ, o który przesunięto korelowane sygnały.



$$R_{xy}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T x(t)y(t+\tau)dt$$

Właściwości:

1. $R_{xy}(\tau) = R_{yx}(-\tau)$
2. $|R_{xy}(\tau)|^2 \leq R_{xx}(0)R_{yy}(0)$
3. $|R_{xy}(\tau)| \leq ½[R_{xx}(0)+R_{yy}(0)]$
4. $R_{xy}(\tau)=0$ => sygnały x i y są nieskorelowane

W sytuacjach praktycznej analizy sygnałów odcinek analizowanego sygnału jest ograniczony, a w związku z tym granica musi zostać zastąpiona całką:

$$R_{xy}(\tau) = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)y(t+\tau)dt$$

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

Współczynnik korelacji

Dwa procesy ergodyczne – x(t), y(t)

Unormowana funkcja kowariancji wzajemnej – współczynnik korelacji wzajemnej:

$$\rho_{xy}(\tau)=\frac{\lim\limits_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T[x(t)-m_x][y(t+\tau)-m_y]dt}{\sqrt{C_{xx}(0)C_{yy}(0)}}=\frac{C_{xy}(\tau)}{\sqrt{s_x s_y}}$$

gdzie:

m_x, m_y	wartości oczekiwane	$m=\lim\limits_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T x(t)dt$
s_x, s_y	wariancje	$s=\lim\limits_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T [x(t)-m_x]^2 dt$
C_{xx}, C_{yy}, C_{xy}	kowariancje	$C=\lim\limits_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T [x(t)-m_x][x(t+\tau)-m_x]dt$

PROGRAM ROZWOJOWY
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

Współczynnik korelacji

Dwa procesy ergodyczne – x(t), y(t)

Współczynnik korelacji wzajemnej:

$$\rho_{xy}(\tau)=\frac{\lim\limits_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T[x(t)-m_x][y(t+\tau)-m_y]dt}{\sqrt{C_{xx}(0)C_{yy}(0)}}=\frac{C_{xy}(\tau)}{\sqrt{s_x s_y}}$$

Wielkość ta istotnie różni się od funkcji korelacji – wartość tego współczynnika niesie ilościową informację o podobieństwie dwóch sygnałów losowych. Podczas gdy wartość maksimum funkcji korelacji jest zależna od amplitud obu sygnałów, wartość ρ_{xy} nie zależy od tych amplitud. Wartość ρ_{xy} równa jedności oznacza identyczność obu sygnałów, wartość bliska jedności – „znaczne podobieństwo” tych sygnałów. Współczynnik ten spełnia warunek |ρ|=<1.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Współczynnik autokorelacji

Proces ergodyczny x(t)

Unormowana funkcja autokowariancji – współczynnik autokorelacji:

$$\rho_{xx}(\tau) = \frac{\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T [x(t) - m_x][x(t+\tau) - m_x]dt}{\sqrt{C_{xx}(0)C_{xx}(0)}} = \frac{C_{xx}(\tau)}{s_x}$$

Współczynnik ten spełnia warunek: $\rho_{xx}(0) = 1$

Zastosowanie funkcji i współczynnika korelacji

Estymacja czasu opóźnienia I

Sygnał ergodyczny x(t)

i jego opóźniona i przeskalowana wersja (a<1): $y(t)=ax(t-\tau_0)$

Funkcja korelacji wzajemnej dla sygnałów x(t) i y(t)

$$R_{xy}(\tau) = E[x(t)y(t+\tau)] = E[x(t)ax(t+\tau-\tau_0)] = aE[x(t)x(t+\tau-\tau_0)] = aR_{xx}(\tau-\tau_0)$$

Funkcja $R_{xy}(\tau)$ więc funkcją autokorelacji sygnału x(t), przesuniętą o τ_0 i pomnożoną przez współczynnik a.

Wartość maksymalna tej funkcji leży dla $\tau=\tau_0$ i jest równa

$$R_{xy}(\tau_0) = aR_{xx}(\tau_0 - \tau_0) = aR_{xx}(0) = a\sigma_x^2$$

Znalezienie maksimum R_{xy} pozwala wyznaczyć opóźnienie sygnałów x(t) i y(t).

PROGRAM ROZWOJOWY POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

Zastosowanie funkcji i współczynnika korelacji

Estymacja czasu opóźnienia II

Sygnał ergodyczny x(t)

i jego opóźniona i przeskalowana wersja y(t)=ax(t-τ$_0$)

Funkcja korelacji wzajemnej dla sygnałów x(t) i y(t): $R_{xy}(\tau) = aR_{xx}(\tau - \tau_0) = a\sigma_x^2$

ponieważ $C_{xy}(\tau_0) = aR_{xx}(0) = a\sigma_x^2$ $\sigma_x = \sqrt{s_x}$

Współczynnik korelacji wzajemnej procesów x i y ma w ogólności postać: $\rho_{xy}(\tau_0) = \dfrac{C_{xy}(\tau_0)}{\sigma_x \sigma_y} = a\dfrac{\sigma_x}{\sigma_y}$

ponieważ w analizowanym przypadku: $\sigma_y = a\sigma_x$

mamy:

$$\rho_{xy}(\tau_0) = a\frac{\sigma_x}{\sigma_y} = 1$$

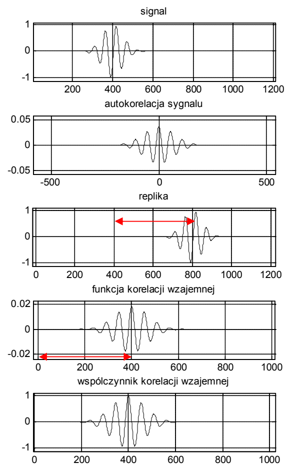
KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

PROGRAM ROZWOJOWY POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

Zastosowanie funkcji i współczynnika korelacji

Estymacja czasu opóźnienia III



x(t)

R_{xx}

y(t)=ax(t-τ$_0$), a=1

R_{xy}

$$\rho_{xy}(\tau_0) = \frac{C_{xy}(\tau_0)}{\sigma_x \sigma_y} = 1$$

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

PROGRAM ROZWOJOWY POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

Funkcja korelacji sygnałów deterministycznych

Funkcję korelacji (wzajemnej, autokorelacji, współczynnik autokorelacji i korelacji) możemy wyznaczać także dla sygnałów deterministycznych. Stosujemy te same formuły co w przypadku sygnałów losowych, dostosowane do właściwości energetycznych sygnału, np. dla funkcji korelacji:

Sygnały o skończonej energii

$$R_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y(t+\tau)dt$$

Sygnały okresowe (okres T) lub sygnały o skończonym czasie trwania T

$$R_{xy}(\tau) = \frac{1}{T}\int_{0}^{T} x(t)y(t+\tau)dt$$

Sygnały o skończonej mocy średniej

$$R_{xy}(\tau) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{0}^{T} x(t)y(t+\tau)dt$$

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

PROGRAM ROZWOJOWY POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

Funkcja autokorelacji kombinacji liniowej sygnałów

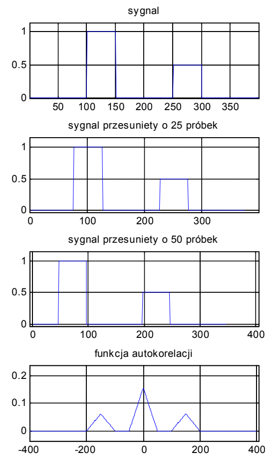
$x(t)=ax_1(t) + bx_2(t)$

Sygnał o skończonej energii $R_{xx}(\tau) = \int_{\infty}^{\infty} x(t)x(t+\tau)dt$

$R_{xx}(\tau)=E[(ax_1(t) + bx_2(t))\ (ax_1(t+\tau) + bx_2(t+\tau))]=$

$= E[a^2x_1(t)x_1(t+\tau)+ b^2x_2(t)x_2(t+\tau) + abx_1(t)x_2(t+\tau) + abx_2(t)x_1(t+\tau)]=$

$= a^2R_{x1x1}(\tau)+ b^2R_{x2x2}(\tau)+ab(R_{x2x1}(\tau)+ R_{x1x2}(\tau));$



$\tau = 0$ R_{xx} – pole pod kwadratem całego sygnału

$\tau \in (0,50)$ R_{xx} – pole pod kwadratem części sygnału

$\tau \in (50,100)$ R_{xx} – pole równe zero

R_{xx} jest funkcją parzystą i przyjmuje maksymalną wartość dla $\tau = 0$!!!!

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

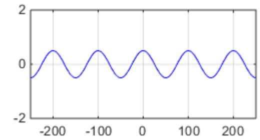
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

PROGRAM ROZWOJOWY
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

Przykłady funkcji autokorelacji procesów losowych

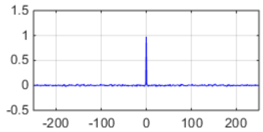
1 – sygnał sinusoidalny sin(ωt)

$$R_{xx}(\tau) = \frac{1}{T}\int_{t_o}^{t_o+T} \sin(\omega t)\sin(\omega t+\tau)dt = \frac{1}{2}\cos(\omega\tau)$$

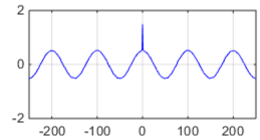


2 – szum losowy szerokopasmowy („biały”)

$R_{xx}(0)$ – kwadrat wartości wartość skutecznej



3 – sygnał sinusoidalny plus szum biały (nieskorelowany z sygnałem sin)



R_{xx} jest funkcją parzystą i przyjmuje maksymalną wartość dla τ =0!!!!

τ = 0 – zerowe opóźnienie

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

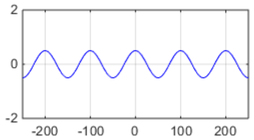
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

PROGRAM ROZWOJOWY
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

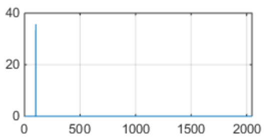
Przykłady funkcji autokorelacji i WGM procesów

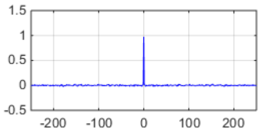
$$R_{xx}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G_{xx}(f)\exp(j2\pi ft)df$$

$$G_{xx}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{xx}(t)\exp(-j2\pi ft)dt$$

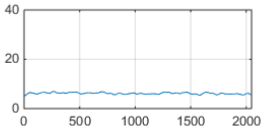


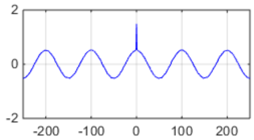
sin() ↔ δ()





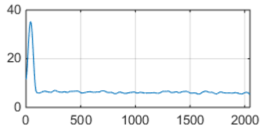
szum biały
δ() ↔ const





sin + szum biały ↔ δ() +const

(o ile szum i sin nieskorelowane, jeśli skorelowane – pojawia się korelacja wzajemna)

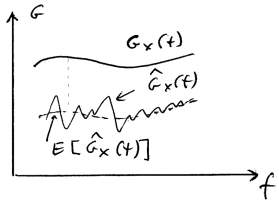


KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Elementy estymacji parametrów procesów losowych

Podstawowe pojęcia teorii estymacji



Estymacja parametrów

Estymator

Właściwości estymatorów („jakość” estymatorów)

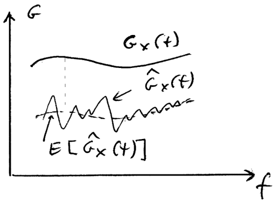
G_x – rzeczywista wartość parametru estymowanego

$\hat{G}_x$ – estymator (zmienna losowa!! rozkład, wariancja, obciążenie)

$E[\hat{G}_x]$ – wartość średnia (oczekiwana) estymatora

PROGRAM ROZWOJOWY
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

Podstawowe pojęcia teorii estymacji



Wynik pomiaru $\hat{G}_x$ będzie różny od rzeczywistej wartości G_x; wystąpić mogą dwojakiego rodzaju błędy:

obciążenie - $(G_x - E[\hat{G}_x])$ -błąd systematyczny

wariancja - $(\hat{G}_x - E[\hat{G}_x])$ - błąd przypadkowy

Błędy te ujmuje sumarycznie błąd średniokwadratowy:

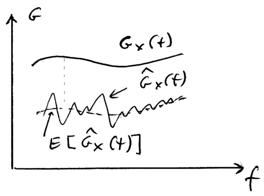
$$MSE=E[(\hat{G}_x - G_x)^2]$$

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

PROGRAM ROZWOJOWY
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

Błąd średniokwadratowy



$$MSE = E[\{\hat{G}(f) - G(f)\}^2] = E[\{(\hat{G}(f) - E[\hat{G}(f)]) - (G(f) - E[\hat{G}(f)])\}^2] =$$

$$= E[(\hat{G}(f) - E[\hat{G}(f)])^2 - 2(\hat{G}(f) - E[\hat{G}(f)])(G(f) - E[\hat{G}(f)]) + (G(f) - E[\hat{G}(f)])^2] =$$

$$= E[(\hat{G}(f) - E[\hat{G}(f)])^2] - 2\underbrace{E[(\hat{G}(f) - E[\hat{G}(f)])}_{\text{wartość zero}}\underbrace{(G(f) - E[\hat{G}(f)])]}_{\text{stała}} + (G(f) - E[\hat{G}(f)])^2 =$$

$$= \underbrace{E[(\hat{G}(f) - E[\hat{G}(f)])^2]}_{\text{wariancja } s^2(\breve{G}(f))} + \underbrace{(G(f) - E[\hat{G}(f)])^2}_{\text{obciążenie } b(\breve{G}(f))}$$

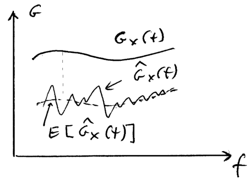
Miara względna błędu: względny błąd średniokwadratowy RMSE:

$$\varepsilon = \frac{MSE}{G^2(f)}$$

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

PROGRAM ROZWOJOWY
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ



Właściwości estymatorów

Oczekujemy, że „dobry" estymator nie będzie wykazywał obciążenia, a jego wariancja będzie jak najmniejsza

Jeśli wartość oczekiwana estymatora jest równa wartości parametru estymowanego – estymator nieobciążony.

$$E[\hat{G}_x] = G_x$$

Pożądane jest, by estymator miał jak najmniejszy błąd średniokwadratowy, czyli małą wariancję (i był nieobciążony)

$$E[(\hat{G}_x - G_x)^2]$$

Estymator najefektywniejszy – estymator nieobciążony o najmniejszej wariancji

Jeśli rozmiary próbki rosną i zachodzi zależność:

$$\lim_{N\to\infty} E[(\hat{G}_x - G_x)^2] = 0$$

estymator jest zgodny

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

PROGRAM ROZWOJOWY
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

Wariancja sumy procesów losowych I

Wariancja sumy sygnałów stochastycznych gaussowskich nieskorelowanych (np. szum biały) o zerowej wartości średniej i wariancji s²

$n_k(t)$ – sygnały stochastyczne

$$E[n_k(t)] = 0$$

X – uśredniona suma sygnałów $n_k(t)$

$$X = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} n_k(t)$$

wartość oczekiwana sumy sygnałów $n_k(t)$

$$E[X] = E[\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} n_k(t)] = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} E[n_k(t)] = 0$$

wariancja sumy sygnałów $n_k(t)$

$$s_x^2 = E[X - EX]^2 = E[X^2 - 2XEX + (EX)^2] =$$
$$= E[X^2] - 2E[XEX] + E(EX)^2 = E[X^2] - E(EX)^2 = E[X^2] - (EX)^2$$

Ponieważ EX=0: $s_x^2 = E[X^2]$

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Wariancja sumy procesów losowych II

Wariancja sumy sygnałów stochastycznych gaussowskich nieskorelowanych (np. szum biały) o zerowej wartości średniej i wariancji s²

$$X = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} n_k(t)$$

$$s_x^2 = E[(\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} n_k(t))^2] = \frac{1}{N^2}E[(n_1(t)+n_2(t)+..n_N(t))^2] = \frac{1}{N^2}\sum_{k=1}^{N} E[n_k^2(t)]$$

ponieważ szum jest nieskorelowany, dla m≠p $E[n_m(t)n_p(t)]=0$

ponieważ $\sum_{k=1}^{N} E[n_k^2(t)] = Ns^2$

$$s_x^2 = \frac{1}{N^2}\sum_{k=1}^{N} E[n_k^2(t)] = \frac{s^2}{N}$$

Wariancja uśrednionej sumy N sygnałów losowych jest równa s^2/N, a więc N-krotnie mniejsza niż wariancja każdego z sygnałów losowych tworzących sumę. Odchylenie standardowe po uśrednieniu jest √N razy mniejsze.

Estymacja funkcji korelacji (autokorelacji)

Estymator funkcji korelacji wzajemnej:

$$R_{xy}(\tau) = \lim_{T\to\infty}\int_0^T x(t)y(t+\tau)dt$$

nieskończony czas całkowania – uśredniania estymatora!!!

Estymatory funkcji korelacji wzajemnej stosowane w obliczeniach komputerowych na rzeczywistych danych:

$$\hat{R}_{xy}(k) = \frac{1}{N-k}\sum_{n=0}^{N-k} x(n)y(n+k)$$ **nieobciążony**

$$\hat{R}_{xxy}(k) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-k} x(n)y(n+k)$$ **obciążony**

skończona liczba próbek sygnału N!!!!

ograniczenie liczby uśrednianych iloczynów!!!

PROGRAM ROZWOJOWY
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

Estymacja funkcji korelacji (autokorelacji)

$$\hat{R}_{xx}(k) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-k} x(n)x(n+k)$$

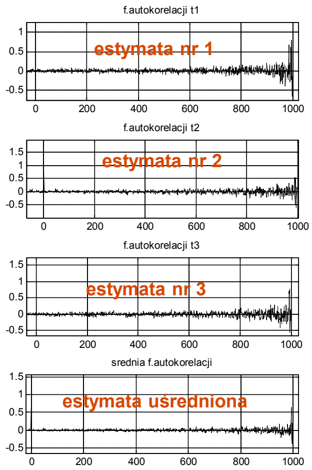
3 realizacje szumu białego,

N=1000, k=±0, 1, ...999

Szum biały – funkcja autokorelacji powinna mieć postać delty Diraca, o wysokości 1, usytuowanej w początku układu!!!

Wynik – delta Diraca o wysokości 1 oraz ???

Widoczne różnice poszczególnych wyników estymacji, wzrost zmienności (wariancji) estymatora ze wzrostem k oraz spadek zmienności estymatora uśrednionego w porównaniu z każdym z pojedyńczych estymatorów.



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

PROGRAM ROZWOJOWY
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

Estymacja funkcji korelacji (autokorelacji)

Sygnał x(n) - szum kolorowy, wynik ograniczenia pasma szumu białego

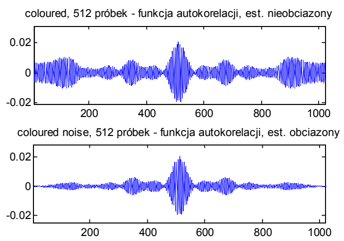
estymator nieobciązony

$$\hat{R}_{xx}(k) = \frac{1}{N-k}\sum_{n=0}^{N-k} x(n)x(n+k)$$

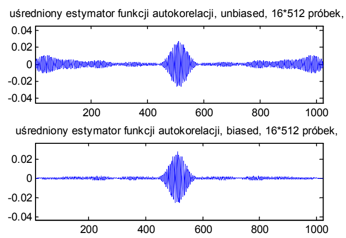
estymator obciążony

$$\hat{R}_{xx}(k) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-k} x(n)x(n+k)$$

Liczba par {x(n), x(n+k)} tworzących wartości iloczynu maleje ze wzrostem k!!



Pojedynczy wynik estymacji



Wynik estymacji po 16 uśrednieniach

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

PROGRAM ROZWOJOWY POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

Widmowa gęstość mocy

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

PROGRAM ROZWOJOWY POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

Widmowa gęstość mocy

Sygnały ciągłe

$$\Phi(\omega) = \lim_{T\to\infty} \frac{|F_T(\omega)|^2}{T}$$

Uwarunkowania praktyczne: $\Phi(\omega) = |F(\omega)|^2/T$

Sygnały spróbkowane/dyskretne

$$G_k = \frac{|X_k|^2}{N/f_s} = \frac{f_s}{N} \left| \sum_{n=0}^{N-1} x_n \exp\left(-j\frac{2\pi nk}{N}\right) \right|^2$$

położenie wartości G_k $f_k = \frac{k}{N} \to f_s\frac{k}{N}$

WGM jest wielkością rzeczywistą.

Ze względu na symetrię wartości X_k dla rzeczywistych wartości x_n mamy symetrię G_k względem N/2 $G_k = G_{N-k}$

Z tego względu wystarcza przedstawienie G_k w zakresie k=0,1,...N/2-1, który odpowiada zakresowi 0-0.5 częstotliwości próbkowania. Oprogramowanie/ analizatory widma prezentują widmową gęstość mocy pomnożoną 2x w takim właśnie przedziale. Jest to tzw. jednostronna widmowa gęstość mocy:

$$G_k = \frac{2|X_k|^2}{N/f_s}$$

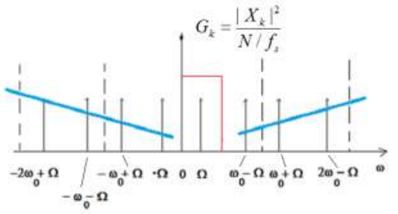
KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

Widmowa gęstość mocy – procedura obliczania

1. Zebrać ciąg próbek sygnału x_n, n=0, 1,...N-1
2. Zastosować funkcję granic w_n: $x_n w_n$, n=0, 1,...N-1
   (ew. uzupełnić ciąg zerami – NFFT próbek)
3. Wyznaczyć DTF X_k ciągu $x_n w_n$, n=0, 1,...N-1, k=0, 1, ... N-1
   (ew. ciągu uzupełnionego zerami – NFFT próbek)
4. Wyznaczyć kwadrat modułu DTF dla k=0,1, .. N/2-1

$$G_k = \frac{f_s}{N} \left| \sum_{n=0}^{N-1} w_n x_n \exp\left(-j\frac{2\pi nk}{N}\right) \right|^2$$



PROGRAM ROZWOJOWY
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

Estymacja WGM procesów normalnych metodą DFT

Względny błąd średniokwadratowy RMSE estymatora jest w przybliżeniu równy

$$\varepsilon \cong \frac{1}{BT}$$

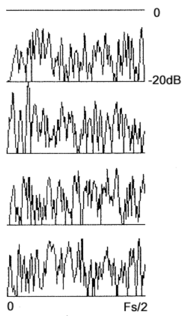
gdzie B – rozdzielczość częstotliwościowa analizy, T – długość odcinka czasowego poddawanego analizie

odstęp czasowy między kolejnymi próbkami wynosi $1/f_s$ (f_s - częstotliwość próbkowania), ciąg próbek poddawany DFT trwa $T=N/f_s$, rozdzielczość częstotliwościowa (odległość między kolejnymi wartościami DFT) jest odwrotnie proporcjonalna do T: $B=f_s/N=1/T$, czyli

1/BT=1 !!!

Błąd średniokwadratowy (związany z wariancją) jest równy kwadratowi wartości estymowanej!!!!

Obok - wyniki estymacji WGM dla 4 realizacji procesu (symulowany szum biały – oczekujemy stałej wartości WGM w całym paśmie) - widoczna znaczna wariancja estymatora.



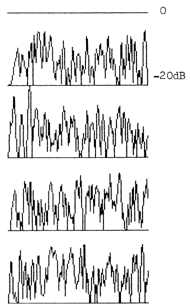
KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

PROGRAM ROZWOJOWY
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

Metody poprawy właściwości estymatorów WGM

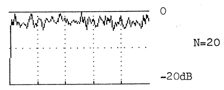
Estymator WGM uzyskany metodą DFT – zmienna losowa o wariancji równej kwadratowi wartości estymowanej (odchylenie standardowe równe wartości estymowanej).

Rozważania dotyczące redukcji wariancji estymatora będącego wynikiem uśrednienia pojedynczych estymatorów można zastosować również do estymatora widmowej gęstości mocy. Estymator WGM będący wartością średnią estymatorów pojedynczych WGM ma wariancję mniejszą w porównaniu z pojedynczymi estymatorami.



Uśredniony estymator DFT WGM

Inne metody – średnia ruchoma



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

PROGRAM ROZWOJOWY
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

Wielkości charakteryzujące sygnały dyskretne
(deterministyczne lub losowe, ergodyczne)

N – liczba próbek, M – maksymalne opóźnienie korelacji

wartość średnia
$$m_x = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} x(n)$$

wariancja
$$s_x = \frac{1}{N-1}\sum_{n=1}^{N}[x(n)-m_x]^2$$

funkcja korelacji wzajemnej, k=0, 1, ...M

przy x(n)=y(n) - f. autokorelacji

estymator obciążony
$$R_{xy}(k) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-k} x(n)y(n+k)$$

estymator nieobciążony
$$R_{xy}(k) = \frac{1}{N-k}\sum_{n=0}^{N-k} x(n)y(n+k)$$

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

PROGRAM ROZWOJOWY
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

Wielkości charakteryzujące sygnały dyskretne
(deterministyczne lub losowe, ergodyczne)

N – liczba próbek, M – maksymalne opóźnienie korelacji

współczynnik korelacji wzajemnej
przy x(n)=y(n) - wsp. autokorelacji
k=0, 1, ...M

$$\rho_{xy}(k)=\frac{\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N-k}[x(n)-m_x][y(n+k)-m_y]}{\sqrt{\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}[x(n)-m_x]^2\,\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}[y(n+k)-m_y]^2}}$$

widmowa gęstość mocy (Wiener-Chinczyn), m,k=0, 1,... M

$$G_{xx}(k)=R_{xx}(0)+2\sum_{m=1}^{M-1}R_{xx}(m)\exp(-j\frac{2\pi mk}{M})$$

widmowa gęstość mocy (bezp. TF), n,k=0, 1,... M

$$G_{xx}(k)=\frac{f_s}{N}\,|\sum_{n=0}^{N-1}x_n\exp(-j\frac{2\pi nk}{N})|^2$$

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY