



# PRZETWARZANIE SYGNAŁÓW

SEMESTR V

*Człowiek - najlepsza inwestycja*



**KAPITAŁ LUDZKI**  
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

**UNIA EUROPEJSKA**  
EUROPEJSKI  
FUNDUSZ SPOŁECZNY



*Projekt współfinansowany przez Unię Europejską  
w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego*



Wykład III

## Procesy stochastyczne

### Elementy estymacji parametrów procesów losowych



**KAPITAŁ LUDZKI**  
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

**UNIA EUROPEJSKA**  
EUROPEJSKI  
FUNDUSZ SPOŁECZNY



**PROGRAM ROZWOJOWY  
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ**

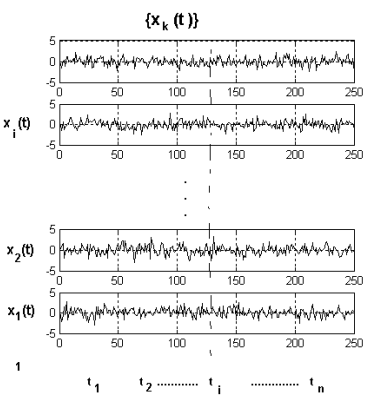
## Procesy stochastyczne

**KAPITAŁ LUDZKI**  
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

**UNIA EUROPEJSKA**  
EUROPEJSKI  
FUNDUSZ SPOŁECZNY

**PROGRAM ROZWOJOWY  
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ**

## Procesy losowe (stochastyczne)



$\{x_k(t)\}$  rodzina funkcji zmiennej losowej i czasu – proces stochastyczny

$x_k(t)$  k-ta realizacja procesu - funkcja czasu dla pewnej wartości zmiennej losowej (wyniku zdarzenia losowego)

$X(t_i)$  wartości procesu dla ustalonego czasu są wartościami zmiennej losowej

Zmienna losowa – funkcja określona na zbiorze zdarzeń i przyjmująca wartości rzeczywiste (z określonym prawdopodobieństwem)

**KAPITAŁ LUDZKI**  
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

**UNIA EUROPEJSKA**  
EUROPEJSKI  
FUNDUSZ SPOŁECZNY



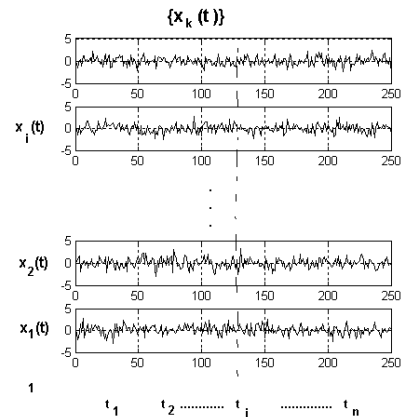
**PROGRAM ROZWOJOWY  
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ**

## Opis procesu stochastycznego

Właściwości statystyczne procesu w pewnym przedziale czasu są określone, jeśli dla tego przedziału znany jest rozkład łączny prawdopodobieństwa zmiennych losowych  $X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n)$ .

Taki rozkład łączny prawdopodobieństwa nazywamy gęstością procesu  $p(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots; x_i, t_i; \dots; x_n, t_n)$ . Rozkład ten określa prawdopodobieństwo, z jakim zmienna losowa  $X$  przyjmuje wartości z przedziału  $(x_i, x_i + \Delta x)$  dla każdego  $t_i$ .

Wyznaczenie tego rozkładu wymaga dysponowania zbiorem wszystkich realizacji procesu i może być bardzo trudne do przeprowadzenia (nierealizowalne) w warunkach pomiarów fizycznych.



KAPITAŁ LUDZKI  
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA  
EUROPEJSKI  
FUNDUSZ SPOŁECZNY



**PROGRAM ROZWOJOWY  
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ**

## Opis sygnałów losowych (stochastycznych)

### Sygnał losowy

- wartość średnia i średniokwadratowa, wariancja (momenty)
- rozkład prawdopodobieństwa - ocena przedziału wartości przyjmowanych przez proces, wnioskowanie o właściwościach rozkładu amplitudy
- funkcja i współczynnik korelacji i autokorelacji - wykrywanie podobnych/powtarzających się (okresowych) struktur w sygnale, pomiar czasu opóźnienia
- widmowa gęstość mocy - ocena właściwości sygnału, ocena właściwości toru sygnałowego, optymalizacja filtracji

### Para sygnałów losowych:

- funkcja i współczynnik korelacji wzajemnej



KAPITAŁ LUDZKI  
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA  
EUROPEJSKI  
FUNDUSZ SPOŁECZNY



## Wielkości charakteryzujące proces stochastyczny I

nieograniczona liczba realizacji procesu,  $x(t)$  – wartości procesu,  $E$  – operator wyznaczania wartości oczekiwanej,  $m$  – wartość średnia procesu,  $p(x,t)$  – jednowymiarowa funkcja gęstości prawdopodobieństwa, ew. funkcja czasu

wartość średnia (pierwszy moment zwykły)  $m(t) = E[x(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) p(x,t) dx$

wartość średniokwadratowa (2-gi moment zwykły)  $m_2(t) = E[x^2(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t) p(x,t) dx$

wariancja (drugi moment centralny)  $s(t) = \mu_2(t) = E[(x(t) - m(t))^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} [x(t) - m(t)]^2 p(x,t) dx$

Wielkości te mogą być funkcjami czasu !!!!

## Wielkości charakteryzujące proces stochastyczny II

nieograniczona liczba realizacji procesu,  $x$  – wartości procesu,  $E$  – operator wyznaczania wartości oczekiwanej,  $m$  – wartość średnia procesu,  $p$  – dwuwymiarowa funkcja gęstości prawdopodobieństwa, ew. funkcja czasu

funkcja autokorelacji  $R(t_1, t_2) = E[x(t_1)x(t_2)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t_1)x(t_2) p(x_1, x_2, t_1, t_2) dx_1 dx_2$

często stosuje się zapis ( $\tau$  - opóźnienie)  $R(t_1, t_2) = R(t_1, t_1 + \tau) = E[x(t_1)x(t_1 + \tau)]$

funkcja autokowariancji

$$C_{xx}(t_1, t_2) = E[(x(t_1) - m(t_1))(x(t_2) - m(t_2))] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x(t_1) - m(t_1))(x(t_2) - m(t_2)) p(x_1, x_2, t_1, t_2) dx_1 dx_2$$

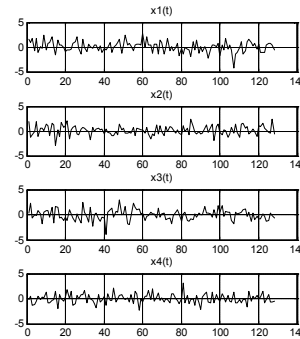
Wielkości te mogą być funkcjami czasu !!!!

## Proces stacjonarny

Jeśli dla dowolnego  $\tau$  rozkład łączny zmiennych losowych  $X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n)$  jest taki sam jak rozkład łączny zmiennych  $X(t_1 + \tau), X(t_2 + \tau), \dots, X(t_n + \tau)$ , proces jest słabo stacjonarny (stacjonarny w szerszym sensie).

Wtedy m i R nie są funkcjami t;  
R jest jedynie funkcją  $\tau$ .

Jeśli wszystkie momenty procesu nie zależą od czasu – proces jest ściśle stacjonarny (stacjonarny w węższym sensie).



$t_1$     $t_2$     $t_3$     $t_4$     $t_5$

## Proces ergodyczny

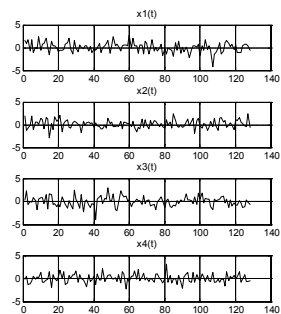
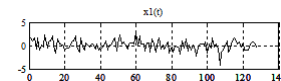
Momenty i funkcja korelacji pojedynczej realizacji  $x_k(t)$  słabo stacjonarnego procesu:

$$m_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x_k(t) dt$$

$$s = E[x_k(t) - m_x]^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T [x_k(t) - m_x]^2 dt$$

$$R_{xx}(\tau, k) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x_k(t) x_k(t + \tau) dt$$

Jeśli wyniki uzyskane w powyższy sposób są identyczne z uzyskanymi dla zbioru realizacji – proces jest ergodyczny. Większość obserwowanych stacjonarnych procesów fizycznych to procesy ergodyczne.



## Proces gaussowski (normalny) I

Rozkład zmiennej losowej normalnej opisany jest zależnością:

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-\alpha)^2}{2\sigma^2}\right)$$

( $\alpha$  - wartość średnia,  $\sigma$  - odchylenie standardowe);

Centralne twierdzenie graniczne – jeśli zmienne losowe są niezależne i mają takie same rozkłady, wartości oczekiwane i skończone wariancje, rozkład ich sumy po wystandaryzowaniu (odjęciu wartości średniej i podzieleniu przez odchylenie standardowe) dąży do rozkładu normalnego, gdy liczba wartości tych zmiennych dąży do nieskończoności.

Twierdzenie to uzasadnia przybliżanie rozkładów wielkości (sygnałów!) spotykanych w fizyce czy technice rozkładem normalnym.

## Proces gaussowski (normalny) II

Model procesu gaussowskiego jest bardzo często wykorzystywany w technice pomiarowej, telekomunikacji – np. suma zakłóceń powodowanych przez różne czynniki o nieznanym rozkładach, szum biały.

Słabo stacjonarne procesy normalne spełniające warunek :

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T}^T |C_{xx}(\tau)| d\tau = 0$$

są ergodyczne

( $C_{xx}$  - funkcja autokowariancji)

Będziemy przyjmować, że mamy do czynienia z takimi procesami.



**PROGRAM ROZWOJOWY  
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ**

## Wyznaczanie parametrów procesu ergodycznego I

Parametry procesu losowego ergodycznego –  
obliczane dla pojedynczej realizacji  $x_k(t)$  :

Wartość oczekiwana (średnia)

$$m_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x_k(t) dt$$

Wariancja:

(kwadrat wartości średniokwadratowej składowej  
zmiennej procesu)

$$s = E[x_k(t) - m_x]^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T [x_k(t) - m_x]^2 dt$$

Funkcja autokowariancji

$$C_{xx}(\tau) = E[(x(t_1) - m)(x(t_1 + \tau) - m)] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T (x(t_1) - m)(x(t_1 + \tau) - m) dt$$



KAPITAŁ LUDZKI  
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA  
EUROPEJSKI  
FUNDUSZ SPOŁECZNY



**PROGRAM ROZWOJOWY  
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ**

## Wyznaczanie parametrów procesu ergodycznego II

Parametry procesu losowego ergodycznego –  
obliczane dla pojedynczej realizacji:

Funkcja autokorelacji

$$R_{xx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t)x(t + \tau) dt$$

Widmowa gęstość mocy

WGM jest transformatą Fouriera funkcji  
autokorelacji procesu (tw. Wienera-Chinczyna):

$$G_{xx}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{xx}(t) \exp(-j2\pi ft) dt$$

$G_{xx}(f) = \text{TF}\{R_{xx}(t)\}$

Funkcja autokorelacji jest odwrotną transformatą  
Fouriera WGM procesu:

$$R_{xx}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G_{xx}(f) \exp(j2\pi ft) df$$

$R_{xx}(t) = \text{TF}^{-1}\{G_{xx}(f)\}$



KAPITAŁ LUDZKI  
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

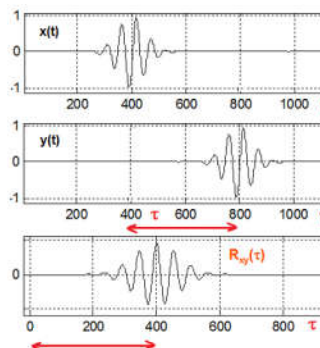
UNIA EUROPEJSKA  
EUROPEJSKI  
FUNDUSZ SPOŁECZNY



### Funkcja korelacji wzajemnej

Jest to wartość oczekiwana iloczynu sygnałów (inaczej ich iloczyn skalarny). Argumentem funkcji korelacji jest czas  $\tau$  (inaczej opóźnienie), o który przesunięto analizowane sygnały. Funkcja ta stanowi miarę podobieństwa tych sygnałów dla danego  $\tau$ .

$$R_{xy}(\tau) = E[x(t)y(t + \tau)] \quad R_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t)y(t + \tau)dt$$



#### Uwaga!

Ponieważ funkcja korelacji wzajemnej jest w myśl definicji wartością średnią iloczynu wartości sygnałów  $x(t)$  i  $y(t+\tau)$ , usytuowanych w punktach  $t$  i  $(t+\tau)$ , uśrednienie powinno zostać przeprowadzone dla nieskończonej liczby tych iloczynów wyznaczonych dla danego  $\tau$  dla różnych  $t$  (wzdłuż całej osi czasu). **Stąd dążący do nieskończoności przedział całkowania - w pomiarach fizycznych (praktycznych) warunek ten nie jest realizowalny.**

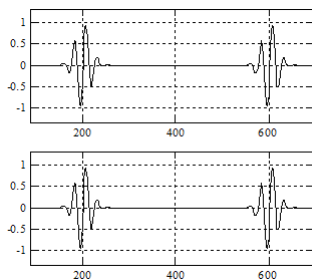


### Funkcja korelacji wzajemnej

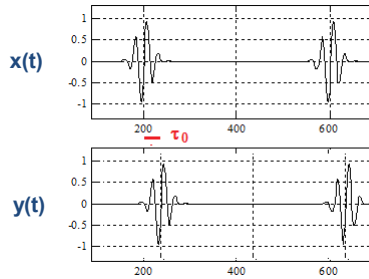
Jest to wartość oczekiwana iloczynu sygnałów, która stanowi miarę podobieństwa tych sygnałów. Argumentem funkcji korelacji jest czas  $\tau$  (inaczej opóźnienie), o który przesunięto względem siebie analizowane sygnały.

Sygnały rzeczywiste  $x(t)$  i  $y(t)$

$$R_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t)y(t + \tau)dt$$



Sygnały identyczne - wysoka wartość funkcji korelacji wzajemnej dla  $\tau = 0, T$  - czas trwania sygnału.



Sygnały przesunięte - niska wartość funkcji korelacji wzajemnej dla  $\tau = 0$ , wysoka dla pewnej wartości  $\tau_0$ .







PROGRAM ROZWOJOWY  
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

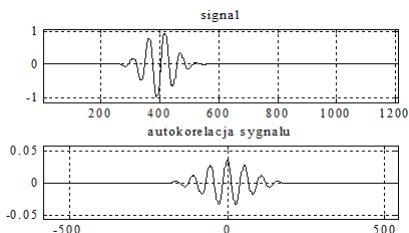
## Funkcja autokorelacji (korelacji własnej)

Sygnal rzeczywisty  $x(t)$

$$R_{xx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t)x(t+\tau)dt$$

Właściwości:

1.  $R_{xx}(0) \geq |R_{xx}(\tau)|$  dla  $\tau \neq 0$
2.  $R_{xx}(\tau) = R_{xx}(-\tau)$  funkcja rzeczywista, parzysta
3.  $R_{xx}(0)$  kwadrat wartości skutecznej – drugi moment zwykły (wariancja w przypadku zerowej wartości średniej sygnału)



KAPITAŁ LUDZKI  
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA  
EUROPEJSKI  
FUNDUSZ SPOŁECZNY



PROGRAM ROZWOJOWY  
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

## Funkcja korelacji wzajemnej

Jest to wartość oczekiwana iloczynu sygnałów, która stanowi miarę podobieństwa tych sygnałów. Argumentem funkcji korelacji jest czas  $\tau$ , o który przesunięto korelowane sygnały.

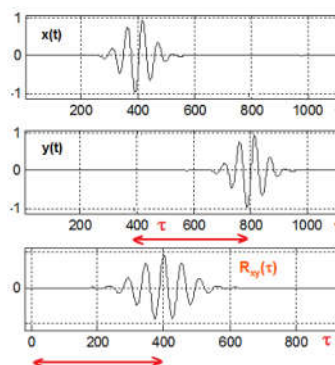
$$R_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t)y(t+\tau)dt$$

Właściwości:

1.  $R_{xy}(\tau) = R_{yx}(-\tau)$
2.  $|R_{xy}(\tau)|^2 \leq R_{xx}(0)R_{yy}(0)$
3.  $|R_{xy}(\tau)| \leq \frac{1}{2}[R_{xx}(0) + R_{yy}(0)]$
4.  $R_{xy}(\tau) = 0 \Rightarrow$  sygnały  $x$  i  $y$  są nieskorelowane

W sytuacjach praktycznej analizy sygnałów odcinek analizowanego sygnału jest ograniczony, a w związku z tym granica musi zostać zastąpiona całką:

$$R_{xy}(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T x(t)y(t+\tau)dt$$



KAPITAŁ LUDZKI  
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA  
EUROPEJSKI  
FUNDUSZ SPOŁECZNY





**PROGRAM ROZWOJOWY  
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ**

## Współczynnik korelacji

Dwa procesy ergodyczne –  $x(t)$ ,  $y(t)$

Unormowana funkcja kowariancji wzajemnej – współczynnik korelacji wzajemnej:

$$\rho_{xy}(\tau) = \frac{\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T [x(t) - m_x][y(t + \tau) - m_y] dt}{\sqrt{C_{xx}(0)C_{yy}(0)}} = \frac{C_{xy}(\tau)}{\sqrt{s_x s_y}}$$

gdzie:

$m_x, m_y$

wartości oczekiwane

$$m = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt$$

$s_x, s_y$

wariancje

$$s = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T [x(t) - m_x]^2 dt$$

$C_{xx}, C_{yy}, C_{xy}$

kowariancje

$$C = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T [x(t) - m_x][x(t + \tau) - m_x] dt$$



KAPITAŁ LUDZKI  
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA  
EUROPEJSKI  
FUNDUSZ SPOŁECZNY



**PROGRAM ROZWOJOWY  
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ**

## Współczynnik korelacji

Dwa procesy ergodyczne –  $x(t)$ ,  $y(t)$

Współczynnik korelacji wzajemnej:

$$\rho_{xy}(\tau) = \frac{\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T [x(t) - m_x][y(t + \tau) - m_y] dt}{\sqrt{C_{xx}(0)C_{yy}(0)}} = \frac{C_{xy}(\tau)}{\sqrt{s_x s_y}}$$

Wielkość ta istotnie różni się od funkcji korelacji – wartość tego współczynnika niesie ilościową informację o podobieństwie dwóch sygnałów losowych. Podczas gdy wartość maksimum funkcji korelacji jest zależna od amplitud obu sygnałów, wartość  $\rho_{xy}$  nie zależy od tych amplitud. Wartość  $\rho_{xy}$  równa jedności oznacza identyczność obu sygnałów, wartość bliska jedności – „znaczące podobieństwo” tych sygnałów. Współczynnik ten spełnia warunek  $|\rho| \leq 1$ .



KAPITAŁ LUDZKI  
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA  
EUROPEJSKI  
FUNDUSZ SPOŁECZNY





**PROGRAM ROZWOJOWY  
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ**

## Współczynnik autokorelacji

Proces ergodyczny  $x(t)$

Unormowana funkcja autokowariancji – współczynnik autokorelacji:

$$\rho_{xx}(\tau) = \frac{\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T [x(t) - m_x][x(t + \tau) - m_x] dt}{\sqrt{C_{xx}(0)C_{xx}(0)}} = \frac{C_{xx}(\tau)}{s_x^2}$$

Współczynnik ten spełnia warunek:  $\rho_{xx}(0) = 1$



KAPITAŁ LUDZKI  
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI



UNIA EUROPEJSKA  
EUROPEJSKI  
FUNDUSZ SPOŁECZNY



**PROGRAM ROZWOJOWY  
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ**

## Zastosowanie funkcji i współczynnika korelacji

### Estymacja czasu opóźnienia I

Sygnal ergodyczny  $x(t)$

i jego opóźniona i przeskalowana wersja ( $a < 1$ ):  $y(t) = ax(t - \tau_0)$

Funkcja korelacji wzajemnej dla sygnałów  $x(t)$  i  $y(t)$

$$R_{xy}(\tau) = E[x(t)y(t + \tau)] = E[x(t)ax(t + \tau - \tau_0)] = aE[x(t)x(t + \tau - \tau_0)] = aR_{xx}(\tau - \tau_0)$$

Funkcja  $R_{xy}(\tau)$  więc funkcją autokorelacji sygnału  $x(t)$ , przesuniętą o  $\tau_0$  i pomnożoną przez współczynnik  $a$ .

Wartość maksymalna tej funkcji leży dla  $\tau = \tau_0$  i jest równa

$$R_{xy}(\tau_0) = aR_{xx}(\tau_0 - \tau_0) = aR_{xx}(0) = a\sigma_x^2$$

Znalezienie maksimum  $R_{xy}$  pozwala wyznaczyć opóźnienie sygnałów  $x(t)$  i  $y(t)$ .



KAPITAŁ LUDZKI  
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI



UNIA EUROPEJSKA  
EUROPEJSKI  
FUNDUSZ SPOŁECZNY



**PROGRAM ROZWOJOWY  
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ**

## Zastosowanie funkcji i współczynnika korelacji

### Estymacja czasu opóźnienia II

Sygnal ergodyczny  $x(t)$

i jego opóźniona i przeskalowana wersja  $y(t)=ax(t-\tau_0)$

Funkcja korelacji wzajemnej dla sygnałów  $x(t)$  i  $y(t)$ :  $R_{xy}(\tau) = aR_{xx}(\tau - \tau_0) = a\sigma_x^2$

ponieważ  $C_{xy}(\tau_0) = aR_{xx}(0) = a\sigma_x^2$   $\sigma_x = \sqrt{s_x}$

Współczynnik korelacji wzajemnej procesów  $x$  i  $y$  ma w ogólności postać:  $\rho_{xy}(\tau_0) = \frac{C_{xy}(\tau_0)}{\sigma_x \sigma_y} = a \frac{\sigma_x}{\sigma_y}$

ponieważ w analizowanym przypadku:  $\sigma_y = a\sigma_x$

$$\rho_{xy}(\tau_0) = a \frac{\sigma_x}{\sigma_y} = 1$$



KAPITAŁ LUDZKI  
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA  
EUROPEJSKI  
FUNDUSZ SPOŁECZNY



**PROGRAM ROZWOJOWY  
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ**

## Zastosowanie funkcji i współczynnika korelacji

### Estymacja czasu opóźnienia III

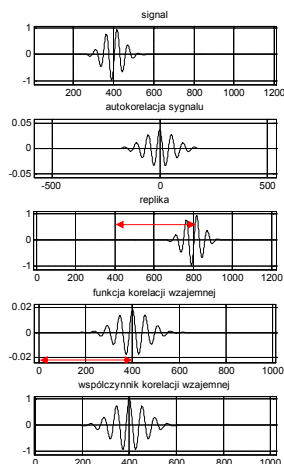
$x(t)$

$R_{xx}$

$y(t)=ax(t-\tau_0), a=1$

$R_{xy}$

$$\rho_{xy}(\tau_0) = \frac{C_{xy}(\tau_0)}{\sigma_x \sigma_y} = 1$$



KAPITAŁ LUDZKI  
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA  
EUROPEJSKI  
FUNDUSZ SPOŁECZNY





PROGRAM ROZWOJOWY  
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

## Funkcja korelacji sygnałów deterministycznych

Funkcję korelacji (wzajemnej, autokorelacji, współczynnik autokorelacji i korelacji) możemy wyznaczać także dla sygnałów deterministycznych. Stosujemy te same formuły co w przypadku sygnałów losowych, dostosowane do właściwości energetycznych sygnału, np. dla funkcji korelacji:

Sygnały o skończonej energii

$$R_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y(t+\tau)dt$$

Sygnały okresowe (okres T) lub sygnały o skończonym czasie trwania T

$$R_{xy}(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T x(t)y(t+\tau)dt$$

Sygnały o skończonej mocy średniej

$$R_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t)y(t+\tau)dt$$



KAPITAŁ LUDZKI  
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA  
EUROPEJSKI  
FUNDUSZ SPOŁECZNY



PROGRAM ROZWOJOWY  
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

## Funkcja autokorelacji kombinacji liniowej sygnałów

$$x(t) = ax_1(t) + bx_2(t)$$

Sygnał o skończonej energii  $R_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x(t+\tau)dt$

$$R_{xx}(\tau) = E[(ax_1(t) + bx_2(t))(ax_1(t+\tau) + bx_2(t+\tau))] =$$

$$= E[a^2x_1(t)x_1(t+\tau) + b^2x_2(t)x_2(t+\tau) + abx_1(t)x_2(t+\tau) + abx_2(t)x_1(t+\tau)] =$$

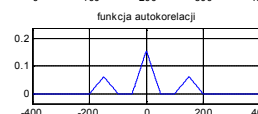
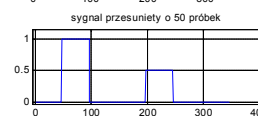
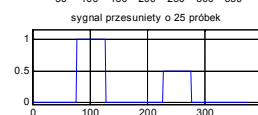
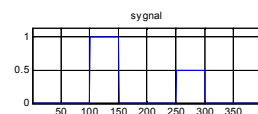
$$= a^2R_{x_1x_1}(\tau) + b^2R_{x_2x_2}(\tau) + ab(R_{x_2x_1}(\tau) + R_{x_1x_2}(\tau));$$

$\tau = 0$   $R_{xx}$  – pole pod kwadratem całego sygnału

$\tau \in (0, 50)$   $R_{xx}$  – pole pod kwadratem części sygnału

$\tau \in (50, 100)$   $R_{xx}$  – pole równe zero

$R_{xx}$  jest funkcją parzystą i przyjmuje maksymalną wartość dla  $\tau = 0$ !!!!



KAPITAŁ LUDZKI  
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA  
EUROPEJSKI  
FUNDUSZ SPOŁECZNY



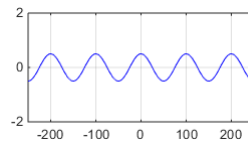


**PROGRAM ROZWOJOWY  
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ**

**Przykłady funkcji autokorelacji procesów losowych**

1 – sygnał sinusoidalny  $\sin(\omega t)$

$$R_{xx}(\tau) = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \sin(\omega t) \sin(\omega t + \tau) dt = \frac{1}{2} \cos(\omega \tau)$$

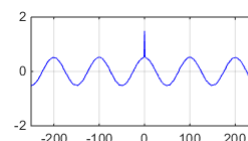


2 – szum losowy szerokopasmowy („biały”)

$R_{xx}(0)$  – kwadrat wartości wartości skutecznej



3 – sygnał sinusoidalny plus szum biały (nieskorelowany z sygnałem sin)



$R_{xx}$  jest funkcją parzystą i przyjmuje maksymalną wartość dla  $\tau = 0$ !!!!

$\tau = 0$  – zerowe opóźnienie



KAPITAŁ LUDZKI  
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA  
EUROPEJSKI  
FUNDUSZ SPOŁECZNY

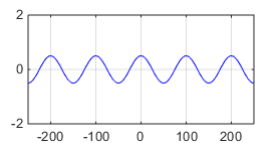


**PROGRAM ROZWOJOWY  
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ**

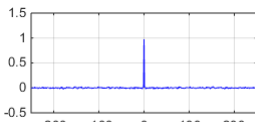
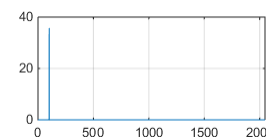
**Przykłady funkcji autokorelacji i WGM procesów**

$$R_{xx}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G_{xx}(f) \exp(j2\pi ft) df$$

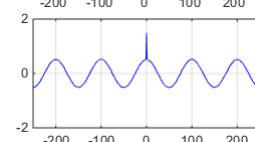
$$G_{xx}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{xx}(t) \exp(-j2\pi ft) dt$$



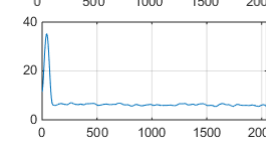
$\sin()$   $\leftrightarrow$   $\delta()$



szum biały  
 $\delta()$   $\leftrightarrow$  const



sin + szum biały  $\leftrightarrow$   $\delta() + \text{const}$   
(o ile szum i sin nieskorelowane, jeśli skorelowane – pojawia się korelacja wzajemna)



KAPITAŁ LUDZKI  
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA  
EUROPEJSKI  
FUNDUSZ SPOŁECZNY



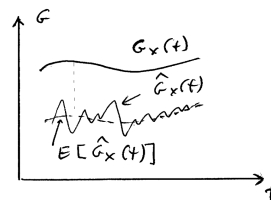
## Elementy estymacji parametrów procesów losowych

## Podstawowe pojęcia teorii estymacji

Estymacja parametrów

Estymator

Właściwości estymatorów („jakość” estymatorów)



$G_x$  – rzeczywista wartość parametru estymowanego

$\hat{G}_x$  – estymator (**zmienna losowa!! rozkład, wariancja, obciążenie**)

$E[\hat{G}_x]$  – wartość średnia (oczekiwana) estymatora



PROGRAM ROZWOJOWY  
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

## Podstawowe pojęcia teorii estymacji

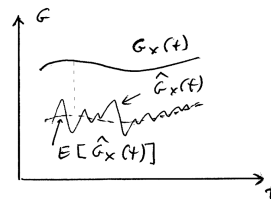
Wynik pomiaru  $\hat{G}_x$  będzie różny od rzeczywistej wartości  $G_x$ ; wystąpić mogą dwojako rodzaju błędy:

obciążenie -  $(G_x - E[\hat{G}_x])$  - błąd systematyczny

wariancja -  $(\hat{G}_x - E[\hat{G}_x])$  - błąd przypadkowy

Błędy te ujmując sumarycznie błąd średniokwadratowy:

$$MSE = E[(\hat{G}_x - G_x)^2]$$



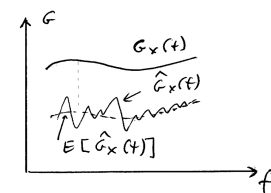
KAPITAŁ LUDZKI  
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA  
EUROPEJSKI  
FUNDUSZ SPOŁECZNY



PROGRAM ROZWOJOWY  
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

## Błąd średniokwadratowy



$$\begin{aligned} MSE &= E[(\hat{G}(f) - G(f))^2] = E[(\hat{G}(f) - E[\hat{G}(f)]) - (G(f) - E[\hat{G}(f)])]^2] = \\ &= E[(\hat{G}(f) - E[\hat{G}(f)])^2 - 2(\hat{G}(f) - E[\hat{G}(f)])(G(f) - E[\hat{G}(f)]) + (G(f) - E[\hat{G}(f)])^2] = \\ &= E[(\hat{G}(f) - E[\hat{G}(f)])^2] - \underbrace{2E[(\hat{G}(f) - E[\hat{G}(f)])(G(f) - E[\hat{G}(f)])]}_{\text{wartość zero}} + \underbrace{(G(f) - E[\hat{G}(f)])^2}_{\text{stała}} = \\ &= \underbrace{E[(\hat{G}(f) - E[\hat{G}(f)])^2]}_{\text{wariancja } s^2(\hat{G}(f))} + \underbrace{(G(f) - E[\hat{G}(f)])^2}_{\text{obciążenie } b(\hat{G}(f))} \end{aligned}$$

Miara względna błędu:  
względny błąd średniokwadratowy RMSE:

$$\varepsilon = \frac{MSE}{G^2(f)}$$



KAPITAŁ LUDZKI  
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA  
EUROPEJSKI  
FUNDUSZ SPOŁECZNY

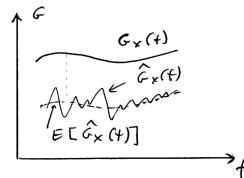






**PROGRAM ROZWOJOWY  
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ**

## Właściwości estymatorów



Oczekujemy, że „dobry” estymator nie będzie wykazywał obciążenia, a jego wariancja będzie jak najmniejsza

Jeśli wartość oczekiwana estymatora jest równa wartości parametru estymowanego – estymator nieobciążony.

$$E[\hat{G}_x] = G_x$$

Pożądane jest, by estymator miał jak najmniejszy błąd średniokwadratowy, czyli małą wariancję (i był nieobciążony)

$$E[(\hat{G}_x - G_x)^2]$$

Estymator najefektywniejszy – estymator nieobciążony o najmniejszej wariancji

Jeśli rozmiary próbki rosną i zachodzi zależność:  
estymator jest zgodny

$$\lim_{N \rightarrow \infty} E[(\hat{G}_x - G_x)^2] = 0$$



KAPITAŁ LUDZKI  
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA  
EUROPEJSKI  
FUNDUSZ SPOŁECZNY



**PROGRAM ROZWOJOWY  
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ**

## Wariancja sumy procesów losowych I

Wariancja sumy sygnałów stochastycznych gaussowskich nieskorelowanych (np. szum biały) o zerowej wartości średniej i wariancji  $s^2$

$n_k(t)$  – sygnały stochastyczne

$$E[n_k(t)] = 0$$

$X$  – uśredniona suma sygnałów  $n_k(t)$

$$X = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N n_k(t)$$

wartość oczekiwana sumy sygnałów  $n_k(t)$

$$E[X] = E\left[\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N n_k(t)\right] = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N E[n_k(t)] = 0$$

wariancja sumy  
sygnałów  $n_k(t)$

$$\begin{aligned} s_x^2 &= E[X - EX]^2 = E[X^2 - 2XEX + (EX)^2] = \\ &= E[X^2] - 2E[XEX] + E(EX)^2 = E[X^2] - E(EX)^2 = E[X^2] - (EX)^2 \end{aligned}$$

Ponieważ  $EX=0$ :

$$s_x^2 = E[X^2]$$



KAPITAŁ LUDZKI  
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA  
EUROPEJSKI  
FUNDUSZ SPOŁECZNY





PROGRAM ROZWOJOWY  
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

## Wariancja sumy procesów losowych II

Wariancja uśrednionej sumy sygnałów stochastycznych gaussowskich nieskorelowanych (np. szum biały) o zerowej wartości średniej i wariancji  $s^2$

$$X = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N n_k(t)$$

$$s_x^2 = E\left[\left(\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N n_k(t)\right)^2\right] = \frac{1}{N^2} E[(n_1(t) + n_2(t) + \dots + n_N(t))^2] = \frac{1}{N^2} \sum_{k=1}^N E[n_k^2(t)]$$

ponieważ szum jest nieskorelowany, dla  $m \neq p$   $E[n_m(t)n_p(t)] = 0$

$$\text{ponieważ} \quad \sum_{k=1}^N E[n_k^2(t)] = Ns^2$$

$$s_x^2 = \frac{1}{N^2} \sum_{k=1}^N E[n_k^2(t)] = \frac{s^2}{N}$$

Wariancja uśrednionej sumy  $N$  sygnałów losowych jest równa  $s^2/N$ , a więc  $N$ -krotnie mniejsza niż wariancja każdego z sygnałów losowych tworzących sumę. Odchylenie standardowe po uśrednieniu jest  $\sqrt{N}$  razy mniejsze.



KAPITAŁ LUDZKI  
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA  
EUROPEJSKI  
FUNDUSZ SPOŁECZNY



PROGRAM ROZWOJOWY  
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

## Estymacja funkcji korelacji (autokorelacji)

Estymator funkcji korelacji wzajemnej:

nieskończony czas całkowania –  
uśredniania estymatora!!!

$$R_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t)y(t+\tau)dt$$

Estymatory funkcji korelacji wzajemnej stosowane w obliczeniach komputerowych na rzeczywistych danych:

$$\hat{R}_{xy}(k) = \frac{1}{N-k} \sum_{n=0}^{N-k} x(n)y(n+k) \quad \text{nieobciążony}$$

$$\hat{R}_{xxy}(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-k} x(n)y(n+k) \quad \text{obciążony}$$

skończona liczba próbek sygnału  $N$ !!!!

ograniczenie liczby uśrednianych iloczynów!!!



KAPITAŁ LUDZKI  
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA  
EUROPEJSKI  
FUNDUSZ SPOŁECZNY





**PROGRAM ROZWOJOWY  
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ**

### Estymacja funkcji korelacji (autokorelacji)

$$\hat{R}_{xx}(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-k} x(n)x(n+k)$$

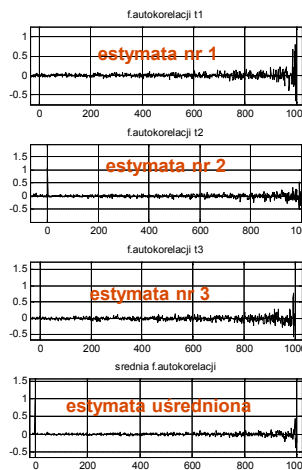
3 realizacje szumu białego,

N=1000, k=±0, 1, ...999

Szum biały – oczekujemy funkcji autokorelacji w postaci delty Diraca, o wysokości 1, usytuowanej w początku układu!!!

Wynik – delta Diraca o wysokości 1 oraz ???

Widoczne różnice poszczególnych wyników estymacji, wzrost zmienności (wariancji) estymatora ze wzrostem opóźnienia k oraz spadek zmienności estymatora uśrednionego w porównaniu z każdym z pojedynczych estymatorów.



KAPITAŁ LUDZKI  
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA  
EUROPEJSKI  
FUNDUSZ SPOŁECZNY



**PROGRAM ROZWOJOWY  
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ**

### Estymacja funkcji korelacji (autokorelacji)

Sygnal x(n) - szum kolorowy, wynik ograniczenia pasma szumu białego

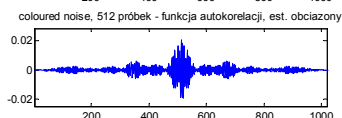
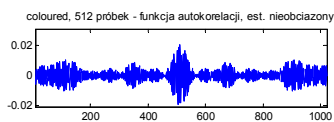
estymator nieobciążony

estymator obciążony

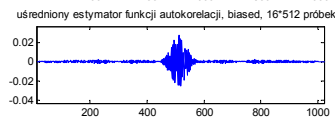
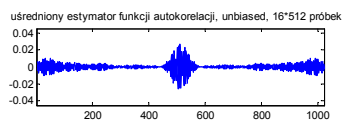
$$\hat{R}_{xx}(k) = \frac{1}{N-k} \sum_{n=0}^{N-k} x(n)x(n+k)$$

$$\hat{R}_{xx}(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-k} x(n)x(n+k)$$

Liczba par {x(n), x(n+k)} tworzących wartości iloczynu maleje ze wzrostem k!!



Pojedynczy wynik estymacji



Wynik estymacji po 16 uśrednieniach



KAPITAŁ LUDZKI  
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA  
EUROPEJSKI  
FUNDUSZ SPOŁECZNY



## Widmowa gęstość mocy

## Widmowa gęstość mocy

Sygnaly ciągłe

$$\Phi(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|F_T(\omega)|^2}{T}$$

Uwarunkowania praktyczne:

$$\Phi(\omega) = |F(\omega)|^2 T$$

Sygnaly spróbkowane/dyskretne

$$G_k = \frac{|X_k|^2}{N/f_s} = \frac{f_s}{N} \left| \sum_{n=0}^{N-1} x_n \exp(-j \frac{2\pi n k}{N}) \right|^2$$

położenie wartości  $G_k$      $f_k = \frac{k}{N} \rightarrow f_s \frac{k}{N}$

WGM jest wielkością rzeczywistą.

Ze względu na symetrię wartości  $X_k$  dla rzeczywistych wartości  $x_n$  mamy symetrię  $G_k$  względem  $N/2$      $G_k = G_{N-k}$

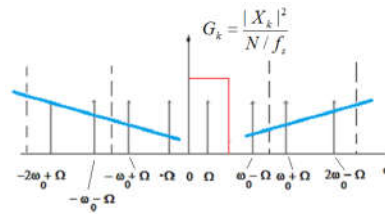
Z tego względu wystarcza przedstawienie  $G_k$  w zakresie  $k=0,1,\dots,N/2-1$ , który odpowiada zakresowi 0-0.5 częstotliwości próbkowania. Oprogramowanie/ analizatory widma prezentują widmową gęstość mocy pomnożoną  $2x$  w takim właśnie przedziale. Jest to tzw. jednostronna widmowa gęstość mocy:

$$G_k = \frac{2 |X_k|^2}{N / f_s}$$

## Widmowa gęstość mocy – procedura obliczania

1. Zebrać ciąg próbek sygnału  $x_n$ ,  $n=0, 1, \dots, N-1$
2. Zastosować funkcję granic  $w_n$ :  $x_n w_n$ ,  $n=0, 1, \dots, N-1$   
(ew. uzupełnić ciąg zerami – NFFT próbek)
3. Wyznaczyć DTF  $X_k$  ciągu  $x_n w_n$ ,  $n=0, 1, \dots, N-1$ ,  $k=0, 1, \dots, N-1$   
(ew. ciągu uzupełnionego zerami – NFFT próbek)
4. Wyznaczyć kwadrat modułu DTF dla  $k=0, 1, \dots, N/2-1$

$$G_k = \frac{f_s}{N} \left| \sum_{n=0}^{N-1} w_n x_n \exp(-j \frac{2\pi n k}{N}) \right|^2$$



## Estymacja WGM procesów normalnych metodą DFT

Względny błąd średniokwadratowy RMSE estymatora jest w przybliżeniu równy

$$\varepsilon \cong \frac{1}{BT}$$

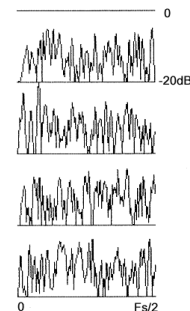
gdzie  $B$  – rozdzielczość częstotliwościowa analizy,  $T$  – długość odcinka czasowego poddawanego analizie

odstęp czasowy między kolejnymi próbkami wynosi  $1/f_s$  ( $f_s$  – częstotliwość próbkowania), ciąg próbek poddawany DFT trwa  $T=N/f_s$ , rozdzielczość częstotliwościowa (odległość między kolejnymi wartościami DFT) jest odwrotnie proporcjonalna do  $T$ :  $B=f_s/N=1/T$ , czyli

$$1/BT=1 !!!$$

Błąd średniokwadratowy (związany z wariancją) jest równy kwadratowi wartości estymowanej!!!!

Obok - wyniki estymacji WGM dla 4 realizacji procesu (symulowany szum biały – oczekujemy stałej wartości WGM w całym paśmie) - widoczna znaczna wariancja estymatora.





**PROGRAM ROZWOJOWY  
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ**

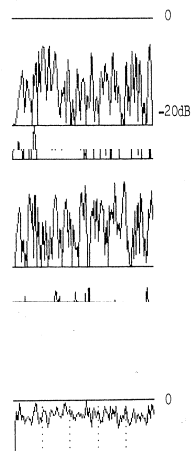
## Metody poprawy właściwości estymatorów WGM

Estymator WGM uzyskany metodą DFT – zmienna losowa o wariancji równej kwadratowi wartości estymowanej (odchylenie standardowe równe wartości estymowanej).

Rozważania dotyczące redukcji wariancji estymatora będącego wynikiem uśrednienia pojedynczych estymatorów można zastosować również do estymatora widmowej gęstości mocy. Estymator WGM będący wartością średnią estymatorów pojedynczych WGM ma wariancję mniejszą w porównaniu z pojedynczymi estymatorami.

Uśredniony estymator DFT WGM

Inne metody – średnia ruchoma



KAPITAŁ LUDZKI  
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA  
EUROPEJSKI  
FUNDUSZ SPOŁECZNY



**PROGRAM ROZWOJOWY  
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ**

## Wielkości charakteryzujące sygnały dyskretne (deterministyczne lub losowe, ergodyczne)

$N$  – liczba próbek,  $M$  – maksymalne opóźnienie korelacji

wartość średnia

$$m_x = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N x(n)$$

wariancja

$$s_x = \frac{1}{N-1} \sum_{n=1}^N [x(n) - m_x]^2$$

funkcja korelacji wzajemnej,  $k=0, 1, \dots, M$

przy  $x(n)=y(n)$  - f. autokorelacji

estymator obciążony

$$R_{xy}(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-k} x(n)y(n+k)$$

estymator nieobciążony

$$R_{xy}(k) = \frac{1}{N-k} \sum_{n=0}^{N-k} x(n)y(n+k)$$



KAPITAŁ LUDZKI  
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA  
EUROPEJSKI  
FUNDUSZ SPOŁECZNY





**PROGRAM ROZWOJOWY  
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ**

## Wielkości charakteryzujące sygnały dyskretne

(deterministyczne lub losowe, ergodyczne)

**N** – liczba próbek, **M** – maksymalne opóźnienie korelacji

współczynnik korelacji wzajemnej

przy  $x(n)=y(n)$  - wsp. autokorelacji

$k=0, 1, \dots, M$

$$\rho_{xy}(k) = \frac{\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N-k} [x(n) - m_x][y(n+k) - m_y]}{\sqrt{\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N [x(n) - m_x]^2 \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N [y(n+k) - m_y]^2}}$$

widmowa gęstość mocy (Wiener-Chinczyn),  $m, k=0, 1, \dots, M$

$$G_{xx}(k) = R_{xx}(0) + 2 \sum_{m=1}^{M-k} R_{xx}(m) \exp(-j \frac{2\pi mk}{M})$$

widmowa gęstość mocy (bezp. TF),  
 $n, k=0, 1, \dots, M$

$$G_{xx}(k) = \frac{f_s}{N} \left| \sum_{n=0}^{N-1} x_n \exp(-j \frac{2\pi nk}{N}) \right|^2$$



KAPITAŁ LUDZKI  
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA  
EUROPEJSKI  
FUNDUSZ SPOŁECZNY

