



**PROGRAM ROZWOJOWY  
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ**

# PRZETWARZANIE SYGNAŁÓW

SEMESTR V

*Człowiek - najlepsza inwestycja*



**KAPITAŁ LUDZKI**  
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

**UNIA EUROPEJSKA**  
EUROPEJSKI  
FUNDUSZ SPOŁECZNY



*Projekt współfinansowany przez Unię Europejską  
w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego*

Wykład IV

**Podstawowe wiadomości o filtrach**

**Ciągi dyskretne i układy liniowe  
niezmienne względem przesunięcia**

## Podstawowe wiadomości o filtrach

### Układ (system) liniowy stacjonarny

Układ liniowy stacjonarny,  
sygnał wejściowy  $x(t)$ , sygnał  
wyjściowy  $y(t)$  opis -  
transmitancja  $T$ :

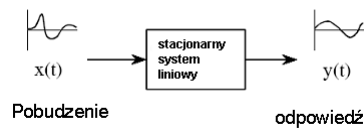
$$y(t) = T[x(t)]$$

układ liniowy

$$T[Ax_1(t) + Bx_2(t)] = AT[x_1(t)] + BT[x_2(t)]$$

układ stacjonarny

$$\text{jeśli } y(t) = T[x(t)], \text{ to } y(t-t_0) = T[x(t-t_0)]$$

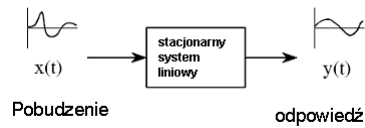


## Układ (system) liniowy stacjonarny

Układ liniowy, stacjonarny, opisany w dziedzinie czasu przez odpowiedź impulsową  $h(t)$  – jego sygnał wyjściowy jest splotem sygnału wejściowego (pobudzenia) i odpowiedzi impulsowej układu:

$$y(t) = \int_0^t x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

odpowiedź impulsowa układu – odpowiedź układu na pobudzenie impulsem Diraca usytuowanym w początku układu:

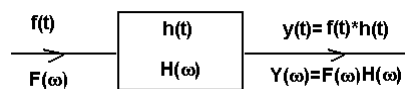


$$h(t) = \int_0^t \delta(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

## Układ (system) liniowy stacjonarny

Opisany w dziedzinie czasu przez odpowiedź impulsową  $h(t)$  i w dziedzinie częstotliwości przez funkcję przenoszenia  $H(\omega)$  – zastosowanie twierdzenia o transformacji splotu funkcji

pobudzenie  $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$   
odpowiedź  $y(t) \leftrightarrow Y(\omega)$



Opis w dziedzinie czasu

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

Opis w dziedzinie częstotliwości

$$Y(\omega) = F(\omega)H(\omega)$$

## Filtry

Filtr - układ o określonych właściwościach częstotliwościowych

Rola – kształtowanie pasma sygnału (eliminacja zakłóceń, poprawa S/N, spełnienie wymagań twierdzenia o próbkowaniu)

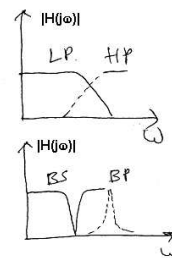
Narzędzia opisu – transformacja Laplace'a, transformacja Fouriera

Odpowiedź częstotliwościowa jest TF odpowiedzi impulsowej i wartością transmitancji  $H(s)$  układu dla  $s=j\omega$

Filtry

- dolnoprzepustowe LP
- górnoprzepustowe HP
- pasmowoprzepustowe BP
- pasmowozaporowe BS
- wszechprzepustowe

$$H(j\omega) = H(s)|_{s=j\omega}$$



## Opis i parametry filtru

- odpowiedź częstotliwościowa

$$H(j\omega) = H(s)|_{s=j\omega} = \frac{H_0}{-\omega^2 + \frac{\omega_0}{Q}j\omega + \omega_0^2}$$

- charakterystyka amplitudowa (moduł odpowiedzi częstotliwościowej)  $|H(j\omega)|$   
częstotliwość graniczna, środkowa, pasmo)

- charakterystyka fazowa

$$\phi = \arg(H(j\omega))$$

- opóźnienie fazowe  $t_p$

$$t_p = -\frac{\phi}{\omega}$$

- opóźnienie grupowe  $t_g$

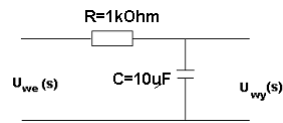
$$t_g = -\frac{d\phi}{d\omega}$$

- dobroć/współczynnik tłumienia ( $Q=1/2\xi$ )

- inne (rzęd filtru, nachylenie modułu charakterystyki częstotliwościowej, odpowiedź skokowa, wzmocnienie)

## Przykład

Filtr dolnoprzepustowy rzędu 1



transmitancja

$$H(s) = \frac{1}{R + \frac{1}{sC}} = \frac{1}{RC} = \frac{\omega_0}{s + \omega_0} = \frac{100}{s + 100}$$

odpowieź  
częstotliwościowa

$$H(j\omega) = \frac{\omega_0}{j\omega + \omega_0} = \frac{100}{j\omega + 100}$$

moduł odpowiedzi  
(ch-ka  
amplitudowa)

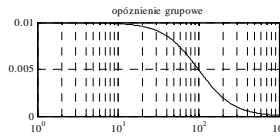
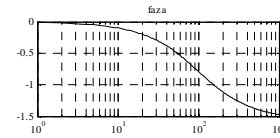
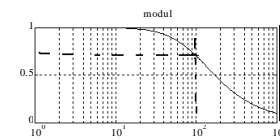
$$|H(j\omega)| = \frac{\omega_0}{|j\omega + \omega_0|} = \frac{\omega_0}{\sqrt{\omega^2 + \omega_0^2}} = \frac{100}{\sqrt{\omega^2 + 100^2}}$$

Charakterystyka  
fazowa

$$\arg(H(j\omega)) = -\arctg\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$$

opóźnienie  
grupowe

$$t_s = -\frac{d(\arctg(\frac{\omega}{\omega_0}))}{d\omega} = \frac{\omega_0}{1 + (\frac{\omega}{\omega_0})^2}$$



Ciągi dyskretne i układy liniowe  
niezmienne względem przesunięcia

## Ciągi dyskretne

Ciągi dyskretne (ciągi próbek sygnałów, wyniki symulacji)

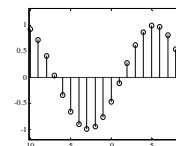
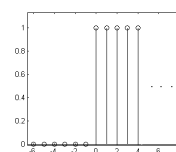
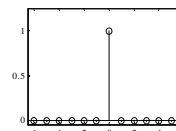
notacja:  $x(n)$      $x[n]$      $x_n$      $x\{n\}$ ,  $n \in \mathbb{N}$

ciąg impulsowy  $\delta(n)$ :  
(delta Kroneckera)                       $\delta(n)=1$  dla  $n=0$  i  $0$  dla  $n$   
pozostałych

ciąg skokowy  $u(n)$  :                       $u(n)=1$  dla  $n \geq 0$  i  $0$  dla  
pozostałych

czyli  $\delta(n)=u(n)-u(n-1)$

ciąg sinusoidalny                       $x(n)=a \sin(\omega n + \phi)$



## Ciągi dyskretne

operacje na ciągach dyskretnych:

- iloczyn i suma, mnożenie przez stałą
- opóźnienie (przesunięcie)
- spłot

ciąg przyczynowy – wartości niezerowe dla  $n \geq 0$

spłot dwóch ciągów  $z(n)=x(n)*y(n)$                        $z(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)y(n-k) = \sum_{k=k_0}^{k_1} x(k)y(n-k)$

Dowolny ciąg dyskretny można przedstawić jako sumę poprzesuwanych i pomnożonych przez odpowiednie stałe ciągów impulsowych:

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \delta(n-k)$$

## Ciągi dyskretne

### Przykład obliczania splotu:

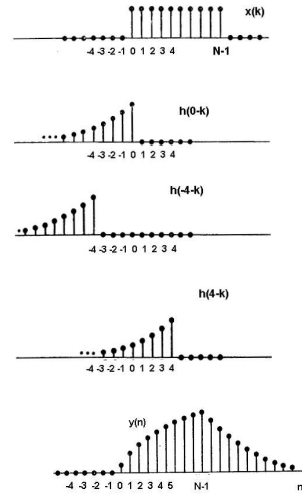
$$x(n)=u(n)-n(n-N) \text{ oraz } h(n)=a^n, a<1, n \geq 0$$

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k) = \sum_{k=k_0}^{k_1} x(k)h(n-k)$$

$$y(0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(-k) \quad y(1) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(1-k) \quad y(2) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(2-k)$$

$$\text{dla } 0 \leq n < N \quad y(n) = \sum_{k=0}^n a^{n-k} = a^n \frac{1-a^{-(n+1)}}{1-a^{-1}}$$

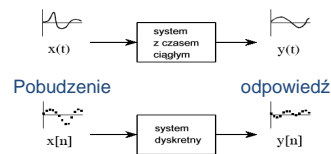
$$\text{dla } n \geq N \quad y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} a^{n-k} = a^n \frac{1-a^{-N}}{1-a^{-1}}$$



## Układy liniowe stacjonarne

Układ liniowy analogowy, stacjonarny - sygnał wyjściowy jest splotem pobudzenia i odpowiedzi impulsowej układu:

$$y(t) = \int_0^t x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$



Odpowiednikiem dyskretnym takiego układu jest dyskretny (cyfrowy) układ liniowy o stałych współczynnikach, niezmienny względem przesunięcia, jego sygnałem wejściowym i wyjściowym są ciągi dyskretne (dalej – układ LNP).

Opis - transmitancja T:

$$y(n)=T[x(n)]$$

układ liniowy

$$T[Ax_1(n) + Bx_2(n)]=AT[x_1(n)] + BT[x_2(n)]$$

niezmienny względem przesunięcia

$$y(n)=T[x(n)], \text{ to } y(n-n_0)=T[x(n-n_0)]$$

## Układy LNP

analogicznie jak w przypadku układów analogowych sygnał wyjściowy  $y(n)$  jest splotem (dyskretnym) sygnału wejściowego  $x(n)$  i odpowiedzi impulsowej układu  $h(n)$ :

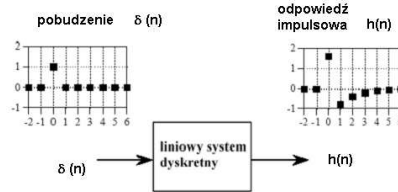
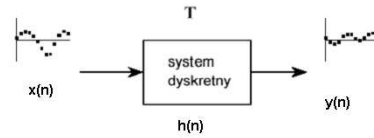
$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k)$$

układ stabilny

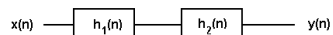
$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| < \infty$$

układ nazywamy przyczynowym, jeśli dla  $k < 0$   $h(k) = 0$

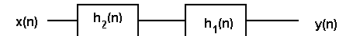
**UWAGA: algorytm cyfrowego przetwarzania sygnałów (obrazów) odpowiada pewnemu układowi LNP !!!!**



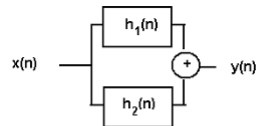
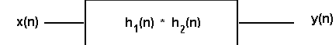
## Łączenie układów LNP



połączenie kaskadowe (łańcuchowe) układów o odpowiedziach impulsowych  $h_1(n)$  i  $h_2(n)$

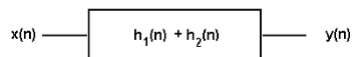


$$h(n) = h_1(n) * h_2(n) = h_2(n) * h_1(n)$$



połączenie równoległe

$$h(n) = h_1(n) + h_2(n)$$





## Transformacja Z

Odpowiednik transformacji Laplace'a dla układów analogowych (z czasem ciągłym)

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} \quad z=re^{j\omega} \quad X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)r^{-n}e^{-jn\omega}$$

notacja  $Z[x(n)]=X(z)$

warunek istnienia TZ - bezwzględna sumowalność ciągu  $|x(n)|r^{-n}$ :

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|r^{-n} < \infty$$

gdy  $r=1$ , czyli  $z=e^{j\omega}$  (na tzw. okręgu jednostkowym - odpowiednik osi  $j\omega$  w transformacji Laplace'a) – dyskretna transformacja Fouriera DTF

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-jn\omega}$$

## Transformacja Z

Właściwości TZ:

- liniowość  $Z[Ax(n) + By(n)] = AX(z) + BY(z)$
- przesunięcie ciągu  $Z[x(n + n_0)] = z^{n_0}X(z)$
- splot ciągów  $Z[x(n)*y(n)] = X(z)Y(z)$
- mnożenie przez ciąg wykładniczy  $Z[a^n x(n)] = X(a^{-1}z)$

## Transformacja Z - przykłady

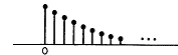


Ciąg  $x(n)=u(n)$  – ciąg skokowy

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u(n)z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-z^{-n}}{1-z^{-1}} = \frac{1}{1-z^{-1}}$$

szereg jest zbieżny dla  $|z^{-1}| < 1$ , czyli  $|z| > 1$  - obszar istnienia TZ - poza okręgiem jednostkowym na płaszczyźnie Z

przyczynowy ciąg wykładniczy  $x(n)=a^n u(n)$ ,  $a < 1$



Transformata Z ciągu:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-(az^{-1})^n}{1-az^{-1}} = \frac{1}{1-az^{-1}}$$

Granica tego ciągu istnieje (szereg jest zbieżny) dla  $|az^{-1}| < 1$ , czyli  $|z| > a$

Natomiast ciąg  $x(n)=a^n u(-n)$  o wyrazach niezerowych dla  $n < 0$ , jest zbieżny dla  $|z| < a$ ;

## Transformacja Z

Równanie opisujące działanie układu LNP: 
$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k) = x(n) * h(n)$$

to transformata Z takiego równania (czyli równanie opisujące działanie układu w dziedzinie z) ma postać:

$$Y(z) = X(z)H(z)$$

gdzie:

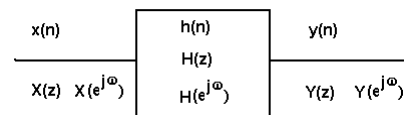
$X(z)$  - TZ ciągu wejściowego (pobudzenia)

$Y(z)$  - TZ ciągu wyjściowego (odpowiedzi)

$H(z)$  - TZ odpowiedzi impulsowej układu

Na okręgu jednostkowym obowiązuje:

$$Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})X(e^{j\omega})$$



## Reprezentacja częstotliwościowa ciągów dyskretnych

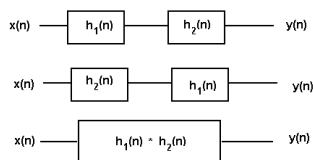
ciąg wykładniczy  $x(n)=\exp(j\omega n)$

odpowiedź układu LNP na taki sygnał jest następująca:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) \exp(j\omega(n-k)) = \exp(j\omega n) \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) \exp(-j\omega k) = \exp(j\omega n) H(e^{j\omega})$$

przy czym  $H(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) \exp(-j\omega k)$

Wyrażenie to jest TF ciągu  $h(n)$ , nazywamy je charakterystyką częstotliwościową układu o odpowiedzi impulsowej  $h(n)$ . Jest to zarazem TZ odpowiedzi impulsowej tego układu wyznaczona na okręgu jednostkowym ( $z=e^{j\omega}$ ).



Odpowiedź częstotliwościowa połączenia kaskadowego układów LNP jest iloczynem odpowiedzi częstotliwościowych poszczególnych członów

$$h(n) = h_1(n) * h_2(n) \leftrightarrow H(e^{j\omega}) = H_1(e^{j\omega}) H_2(e^{j\omega})$$

## Reprezentacja częstotliwościowa ciągów dyskretnych

TF ciągu  $h(n)$  - charakterystyka częstotliwościowa układu o odpowiedzi impulsowej  $h(n)$ :

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) \exp(-j\omega k)$$

Zapis:  $H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})| e^{j \arg(H(e^{j\omega}))}$

$|H(e^{j\omega})|$  - moduł charakterystyki częstotliwościowej (ch-ka amplitudowa)

$\arg(H(e^{j\omega}))$  - faza charakterystyki częstotliwościowej (ch-ka fazowa)

Opóźnienie grupowe wprowadzane przez układ:  $\tau(e^{j\omega}) = -\frac{d(\arg(H(e^{j\omega})))}{d\omega}$

Parametry - okresowe z okresem  $2\pi$ !!!!

## Równania różnicowe o stałych współczynnikach

Opis przyczynowych układów LNP – równania różnicowe jak obok, które wiążą ze sobą zbiory próbek wejściowych  $x(n-r)$  i wyjściowych  $y(n-k)$  z użyciem odpowiednich współczynników, właściwych dla danego układu

$$\sum_{k=0}^N a_k y(n-k) = \sum_{r=0}^M b_r x(n-r)$$

$$y(n) = -\sum_{k=1}^N \frac{a_k}{a_0} y(n-k) + \sum_{r=0}^M \frac{b_r}{a_0} x(n-r)$$

Powyższa postać określa wartość bieżącej próbki ciągu wyjściowego układu LNP

Jeśli dla  $k > 0$   $a_k = 0$ , mamy do czynienia z tzw. układem o skończonej odpowiedzi impulsowej SOI (albo FIR - Finite Impulse Response). Równanie różnicowe przyjmuje postać:

$$y(n) = \sum_{r=0}^M \frac{b_r}{a_0} x(n-r) = \sum_{r=0}^M h(r) x(n-r) = h(n) * x(n)$$

współczynniki odpowiedzi impulsowej układu są równe  $h(n) = b_n / a_0$ .

Jeśli dla  $k > 0$   $a_k \neq 0$  – układ o nieskończonej odpowiedzi impulsowej NOI (albo IIR Infinite Impulse Response). Odpowiedź impulsowa nie jest określona w jawny sposób.

## Równania różnicowe o stałych współczynnikach

Do równania różnicowego opisującego układ LNP możemy zastosować TZ:

$$\sum_{k=0}^N a_k y(n-k) = \sum_{r=0}^M b_r x(n-r) \quad Z[x(n+n_0)] = z^{n_0} X(z)$$

$$\sum_{k=0}^N a_k Y(z) z^{-k} = \sum_{r=0}^M b_r X(z) z^{-r} \quad \text{i dalej} \quad Y(z) \sum_{k=0}^N a_k z^{-k} = X(z) \sum_{r=0}^M b_r z^{-r}$$

i otrzymać wyrażenie przedstawiające funkcję przenoszenia układu – jego transmitancję (transformatę Z odpowiedzi impulsowej układu):

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{r=0}^M b_r z^{-r}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}}$$

## Transformacja Z równania różnicowego

transmitancja układu LNP (transformata Z odpowiedzi impulsowej):

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{r=0}^M b_r z^{-r}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}}$$

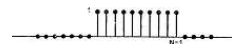
Dla  $z=e^{j\omega}$  otrzymamy TF odpowiedzi impulsowej układu (filtru), czyli jego odpowiedź częstotliwościową:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{\sum_{r=0}^M b_r e^{-j\omega r}}{\sum_{k=0}^N a_k e^{-j\omega k}} \quad H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})| e^{j \arg(H(e^{j\omega}))}$$

## Przykłady układów SOI i NOI

Układ o odpowiedzi impulsowej:

$h(n)=1$  dla  $0 \leq n \leq N-1$ , 0 dla pozostałych - układ SOI



odpowiedź częstotliwościowa:

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) \exp(-j\omega k) = \sum_{k=0}^{N-1} \exp(-j\omega k) = \frac{1 - e^{-j\omega N}}{1 - e^{-j\omega}} = \frac{e^{-j\omega N/2} (e^{j\omega N/2} - e^{-j\omega N/2})}{e^{-j\omega/2} (e^{j\omega/2} - e^{-j\omega/2})} = \frac{\sin(\omega N/2)}{\sin(\omega/2)} e^{-j(N-1)\omega/2}$$

**moduł**  $|H(e^{j\omega})| = \left| \frac{\sin(\omega N/2)}{\sin(\omega/2)} \right|$

**faza**  $\arg(H(e^{j\omega})) = -(N-1)\omega/2$

**opóźnienie**  $\tau(e^{j\omega}) = (N-1)/2$

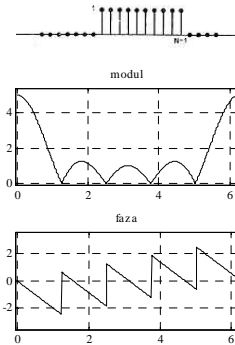
**równanie różnicowe**  $y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k)$

## Przykłady układów SOI i NOI

Układ SOI  
 $h(n)=1$  dla  $0 \leq n \leq N-1$ , 0 dla pozostałych

moduł  $|H(e^{j\omega})| = \left| \frac{\sin(\omega N / 2)}{\sin(\omega / 2)} \right|$

faza  $\arg(H(e^{j\omega})) = -(N-1)\omega / 2$



Interpretacja: jest to układ, na którego wyjściu pojawia się suma N poprzednich próbek sygnału – układ uśrednia, a więc eliminuje wyższe składowe częstotliwościowe – stąd charakterystyka dolnoprzepustowa

**Uwaga: parametry opisujące filtr (moduł, faza, opóźnienia) są okresowe z okresem  $2\pi$ !!!!**

## Przykłady układów SOI i NOI

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{r=0}^M b_r z^{-r}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}}$$

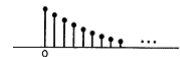
Układ opisany równaniem różnicowym  $y(n)=a y(n-1) + x(n)$   
 jest to układ NOI

$$Z[x(n+n_0)] = z^{n_0} X(z)$$

Transmitancja układu

$$H(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z - a}$$

Przy założeniu przyczynowości odpowiedź impulsowa ma postać  $h(n)=a^n u(n)$



Charakterystyka częstotliwościowa układu

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}} = \frac{e^{j\omega}}{e^{j\omega} - a}$$

(okrąg jednostkowy –  $z=e^{j\omega}$ ) – okresowa z okresem  $2\pi$ !!!

## Przykłady układów SOI i NOI

Układ NOI opisany równaniem różnicowym  $y(n)=a y(n-1) + x(n)$

Charakterystyka częstotliwościowa układu

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}} = \frac{e^{j\omega}}{e^{j\omega} - a}$$

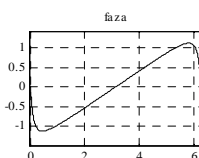
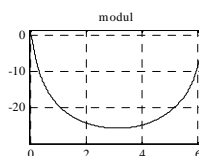
moduł

$$|H(e^{j\omega})| = \frac{1}{\sqrt{(\cos\omega - a)^2 + \sin^2\omega}} = \frac{1}{\sqrt{1 + a^2 - 2a\cos\omega}}$$

faza

dla  $a=0.9$

$$\arg(H(e^{j\omega})) = \omega - \arctg \frac{\sin\omega}{\cos\omega - a}$$



## Układy SOI o liniowej charakterystyce fazowej

Filtry przyczynowe

Liniowa charakterystyka filtrów SOI – gdy odpowiedź impulsowa jest symetryczna

$$h(n)=h(N-1-n)$$

równanie różnicowe

$$y(n)=0.25x(n)+0.5x(n-1)+x(n-2)+0.5x(n-3)+0.25x(n-4)$$

transmitancja

$$H(z)=0.25 + 0.5z^{-1} + z^{-2} + 0.5z^{-3} + 0.25z^{-4}$$

Odpowiedź częstotliwościowa

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= 0.25 + 0.5 e^{-j\omega} + e^{-j2\omega} + 0.5 e^{-j3\omega} + 0.25 e^{-j4\omega} = \\ &= e^{-j2\omega} [0.25 e^{j2\omega} + 0.5 e^{j\omega} + 1 + 0.5 e^{-j\omega} + 0.25 e^{-j2\omega}] = \\ &= e^{-j2\omega} [0.5\cos 2\omega + \cos\omega + 1] \end{aligned}$$

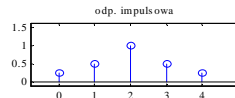
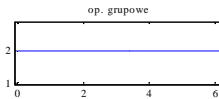
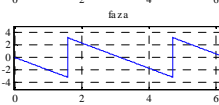
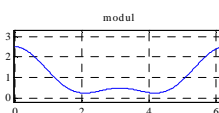
Moduł odpowiedzi  $|H(e^{j\omega})| = |0.5\cos 2\omega + \cos\omega + 1|$

faza  $\arg(H) = -2\omega$  !!

opóźnienie grupowe 2 (próbki)

liniowa!!!

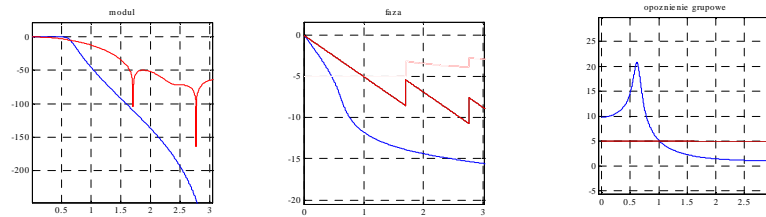
stałe!!



## Porównanie właściwości układów SOI i NOI

Istotną właściwością układów SOI – mogą posiadać liniową charakterystykę fazową. Zaletą tą jest uzyskana za cenę gorszych właściwości charakterystyki amplitudowej w porównaniu z układami NOI, które przy tym samym rzędzie zapewnią znacznie większe tłumienie w pasmie zaporowym. Układy NOI mogą posiadać nieliniowe charakterystyki fazowe.

**filtr SOI – rząd 10,  $f_g=0.2f_s$**     **filtr NOI – rząd 10,  $f_g=0.2f_s$**



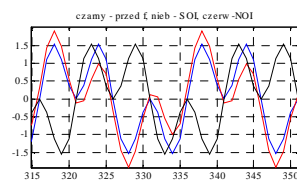
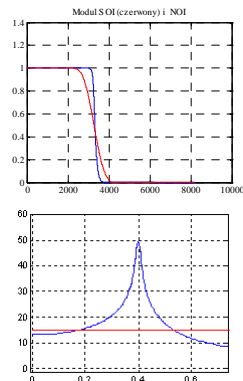
**NOI**  $y(n) = -\sum_{k=1}^N \frac{a_k}{a_0} y(n-k) + \sum_{r=0}^M \frac{b_r}{a_0} x(n-r)$     **SOI**  $y(n) = \sum_{r=0}^M \frac{b_r}{a_0} x(n-r) = \sum_{r=0}^M h(r)x(n-r) = h(n) * x(n)$

## Porównanie właściwości układów SOI i NOI

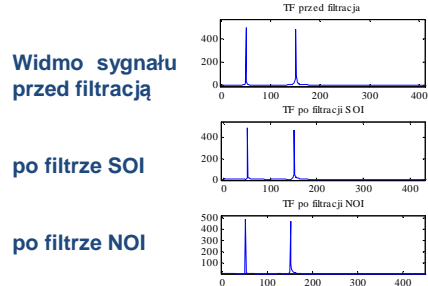
Skutki transmisji złożonych sygnałów przez układy o różnych cechach opóźnienia grupowego

Sygnał złożony z dwóch składowych:  
 $x = \sin(2\pi t * 150) + \sin(2\pi t * 50)$ ;

Filtry NOI i SOI tego samego rzędu 30



Zniekształcenia przebiegu przez filtr NOI





## Metody projektowania filtrów cyfrowych

Filtr – algorytm przetwarzania opisany równaniem różnicowym, wykorzystywany w dziedzinie czasu (dyskretnego). Wymagania określone są najczęściej w dziedzinie częstotliwości poprzez określenie parametrów takich jak pasmo przepustowe, pasmo przejściowe, granica pasma zaporowego, minimalne tłumienie w pasmie zaporowym. Na podstawie tych założeń należy wyznaczyć wartości współczynników filtru, czyli współczynników równania różnicowego.

Istnieją dwie grupy metod projektowania filtrów cyfrowych:

- Metody wykorzystujące znane prototypy filtrów analogowych (NOI)
- Metody bezpośrednie - aproksymacja poszukiwanej charakterystyki (NOI, SOI)

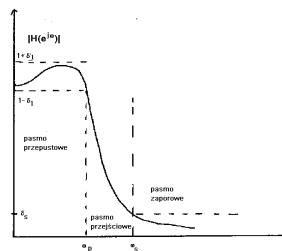
## Metody projektowania filtrów cyfrowych

Założenia projektowe

- częstotliwość graniczna pasma przepustowego
- rodzaj charakterystyki
- częstotliwość graniczna pasma zaporowego
- minimalne tłumienie w pasmie zaporowym

Pozwala to zapisać dwa warunki na  $|H(e^{j\omega})|$ :

$$20 \lg |H(e^{j\omega_p})| = \delta_1 \qquad 20 \lg |H(e^{j\omega_s})| = \delta_2$$



Na podstawie tych warunków wyznacza się rząd filtru, a następnie współczynniki filtru – procedury projektowe np. w środowisku Matlab.

## Projektowanie filtrów NOI

Metody wykorzystujące teorię analogowych układów liniowych

**Metoda transformacji biliniowej**

Znana jest transmitancja filtru analogowego  $H_a(s)$

Dokonując podstawienia:

$$s = \frac{2}{T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$$

uzyskujemy transmitancję  $H(z)$  odpowiadającego mu filtru dyskretnego. W celu uzyskania charakterystyki częstotliwościowej filtru dyskretnego podstawienie ma postać:

$$s = \frac{2}{T} \frac{1 - e^{-j\omega}}{1 + e^{-j\omega}}$$

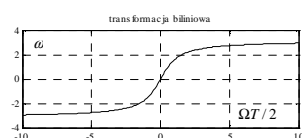
$$s = \sigma + j\Omega$$

$\Omega$ - pulsacja „analogowa”

$\omega$  - pulsacja „dyskretna”

Związek między obiema pulsacjami nie jest liniowy!

$$\omega = 2 \arctg(\Omega T / 2)$$



## Projektowanie filtrów NOI

Metody bezpośrednie – zadanie charakterystyki, optymalizacja parametrów równania

Minimalizacja błędu średniokwadratowego w dziedzinie częstotliwości: definiuje się przebieg charakterystyki amplitudowej filtru  $|H_d(e^{j\omega})|$  dla zbioru  $M$  pulsacji  $\{\omega_i\}$ , a następnie dobiera współczynniki przedstawionej w następujący sposób charakterystyki filtru:

$$H(z) = A \prod_{k=1}^K \frac{1 + a_k z^{-1} + b_k z^{-2}}{1 + c_k z^{-1} + d_k z^{-2}}$$

by zminimalizować błąd średniokwadratowy:

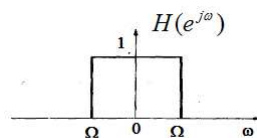
$$E = \sum_{i=1}^M [|H(e^{j\omega_i})| - |H_d(e^{j\omega_i})|]^2$$

minimalizacja  $\rightarrow$  parametry  $a_k, b_k, c_k, d_k$ .

## Projektowanie filtrów SOI

### Obcięcie odpowiedzi filtru NOI i zastosowanie okna

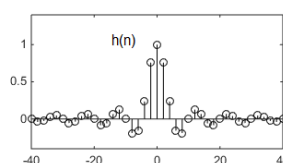
$H$  – założona charakterystyka częstotliwościowa (np. idealny filtr dolnoprzepustowy - NOI – nie jest przyczynowy!!)



$h(n)$  – odpowiedź impulsowa filtru NOI

$$h(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega}) \exp(j\omega n) d\omega$$

Odpowiedź tego filtru jest nieograniczona, przyjmuje wartości niezerowe dla  $n < 0$ ; aby filtr był realizowalny – musi być przyczynowy (niezerowe wartości  $h$  tylko dla  $n \geq 0$ ), aby był to filtr SOI – należy zbiór niezerowych wartości  $h$  ograniczyć;



## Projektowanie filtrów SOI

### Obcięcie odpowiedzi filtru NOI i zastosowanie okna

Odpowiedź tego filtru jest nieograniczona, przyjmuje wartości niezerowe dla  $n < 0$ ; aby filtr był realizowalny – musi być przyczynowy (niezerowe wartości  $h$  tylko dla  $n \geq 0$ ), aby był to filtr SOI – należy zbiór niezerowych wartości  $h$  ograniczyć do pewnego  $N$ ;

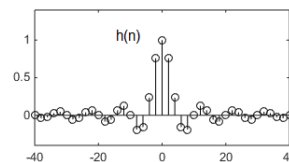
Należy przesunąć odpowiedź  $h(n)$  o  $(N-1)/2$  próbek:

$$h(n - (N-1)/2)$$

a następnie ograniczyć jej długość do  $N$  próbek – czyli pomnożyć przez okno  $w(n)$  przyjmujące niezerowe wartości dla  $n=0, 1, \dots, N-1$ :

$$h_1(n) = w(n) h(n - (N-1)/2) \quad w(n) \neq 0 \text{ dla } n=0, 1, \dots, N-1$$

Operacje te można wykonać w odwrotnej kolejności, tj. zastosować symetryczne okno  $w(n)$ , a następnie przesunąć wynik mnożenia o  $(N-1)/2$  próbek



## Projektowanie filtrów SOI

Odpowiedź  $h(n)$  jest nieskończona i układ nie jest przyczynowy – należy przesunąć  $h(n)$  o  $(N-1)/2$  próbek oraz ograniczyć czas trwania  $h(n)$  (okno). Wynikające z tych operacji transmitancje mają następujące postaci:

przesunięcie o  $(N-1)/2$  
$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n - \frac{N-1}{2}) z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) z^{-\frac{N-1}{2}} z^{-n} = z^{-\frac{N-1}{2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) z^{-n}$$

ograniczenie do  $N$  próbek

$$h_1(n) = h(n - (N-1)/2) w(n) \quad w(n) \neq 0 \text{ dla } n \in [0, N-1] \text{ i } 0 \text{ poza}$$

$$H_1(z) = z^{-\frac{N-1}{2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) w(n) z^{-n} = z^{-\frac{N-1}{2}} \sum_{n=0}^{N-1} h(n) w(n) z^{-n} = z^{-\frac{N-1}{2}} H(z) * W(z)$$

$$H_1(e^{j\omega}) = e^{j\omega \frac{N-1}{2}} H(e^{j\omega}) * W(e^{j\omega})$$

## Projektowanie filtrów SOI

Obcięcie odpowiedzi filtru NOI i zastosowanie okna

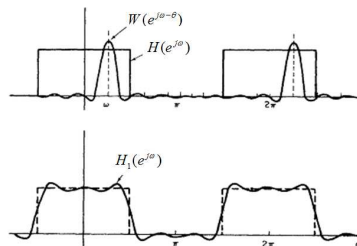
$H$  – założona charakterystyka częstotliwościowa

$H_1$  – spłot charakterystyki  $H$  z transformatą okna ograniczającego.

$W$  – transformata Fouriera okna ograniczającego

$$H_1(e^{j\omega}) = e^{j\omega \frac{N-1}{2}} H(e^{j\omega}) * W(e^{j\omega})$$

$$H_1(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} e^{j\omega \frac{N-1}{2}} \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\theta}) W(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta$$



## Zastosowanie okien do obciętej odpowiedzi impulsowej filtru

- okno prostokątne

- okno Bartletta

$$w(n)=2n/(N-1), \quad n=0,1,\dots,(N-1)/2$$

$$w(n)=2-2n/(N-1), \quad n=(N-1)/2,\dots,N-1$$

- okno Hanna

$$w(n)=0.5(1-\cos(2\pi n/(N-1))), \quad n=0,1,\dots,N-1$$

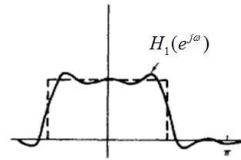
- okno Hamminga

$$w(n)=0.54-0.46\cos(2\pi n/(N-1)), \quad n=0,1,\dots,N-1$$

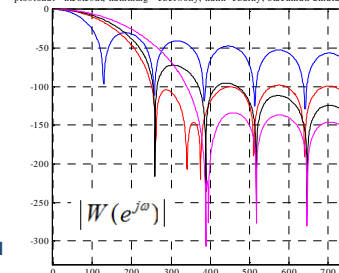
-okno Blackmana

$$w(n)=0.42+0.5\cos(2\pi n/(N-1))+0.08\cos(4\pi n/(N-1)), \quad n=0,1,\dots,N-1$$

Zależnie od zastosowanego okna uzyskamy różny poziom listków bocznych i różną szerokość pasma przejściowego



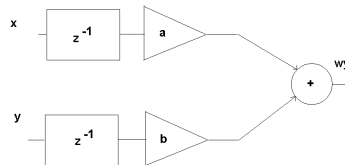
prostokąt - niebieski hamming - czerwony, hann - czarny, blackman-amarant, Y 4B



## Realizacje układów dyskretnych (filtrów cyfrowych)

Jak wynika z postaci równania różnicowego, układy liniowe dyskretne niezmiennie względem przesunięcia można przedstawić w postaci schematów (grafów), posługując się elementami takimi jak blok opóźniający o 1 próbkę, węzeł sumacyjny i mnożenie przez stałą:

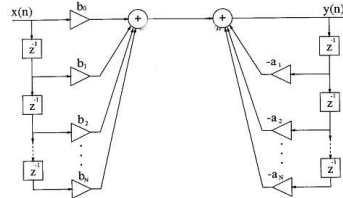
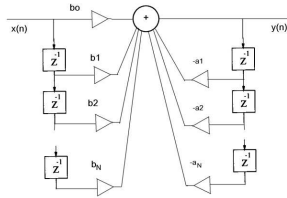
$$y(n) = -\sum_{k=1}^N a_k y(n-k) + \sum_{r=0}^M b_r x(n-r)$$



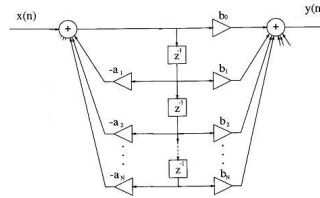
## Realizacje filtrów cyfrowych

### NOI realizacja bezpośrednia (M=N)

$$y(n) = -\sum_{k=1}^N a_k y(n-k) + \sum_{r=0}^M b_r x(n-r)$$



Filtr można traktować jako kaskadowe połączenie dwóch układów liniowych niezmiennych względem przesunięcia – można zamienić ich kolejność – to tzw. kanonicznej postaci filtru:

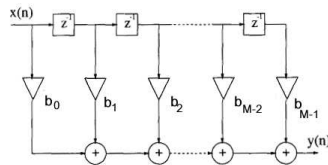


## Realizacje filtrów cyfrowych

### SOI

Realizacja bezpośrednia – wynika z równania

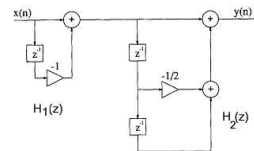
$$y(n) = \sum_{r=0}^M b_r x(n-r)$$



Realizacja kaskadowa – wynik dekompozycji transmitancji na iloczyn składników drugiego i ew. pierwszego rzędu:

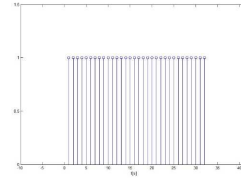
np.  $H(z) = (1-z^{-1})(1-0.5z^{-1}+z^{-2}) = H_1(z)H_2(z)$

$$H(z) = \prod_{i=1}^L H_i(z)$$



## TF dyskretnego okna prostokątnego I

$$w_R(n) = \begin{cases} 1, & n = 0, 1, 2, \dots, N-1 \\ 0, & \text{pozostałe } n \end{cases}$$



DTF

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}$$

$$W_R(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} w_R(n)e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{N-1} w_R(n)e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j\omega n}$$

gdzie  $\omega = 2\pi k/N \Leftrightarrow 2\pi (f/f_p)$

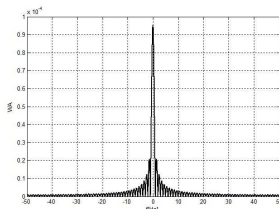
DTF – suma skończonego szeregu geometrycznego:

$$W_R(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{N-1} (e^{-j\omega})^n = \frac{1 - (e^{-j\omega})^N}{1 - e^{-j\omega}}$$

## TF dyskretnego okna prostokątnego II

Z powyższych równań wynika:

$$\begin{aligned} W_R(e^{j\omega}) &= \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{N-1} (e^{-j\omega})^n = \frac{1 - (e^{-j\omega})^N}{1 - e^{-j\omega}} = \\ &= \frac{(e^{-j\omega})^{N/2} (e^{j\omega})^{N/2} - (e^{-j\omega})^{N/2}}{e^{-j\omega/2} - e^{-j\omega/2}} = \frac{(e^{-j\omega})^{N/2} 2j \sin(N\omega/2)}{e^{-j\omega/2} 2j \sin(\omega/2)} = (e^{-j\omega})^{(N-1)/2} \frac{\sin(N\omega/2)}{\sin(\omega/2)} \end{aligned}$$



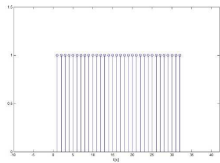
widmo amplitudowe dyskretnego okna prostokątnego (okresowe!!!!)

skala liniowa

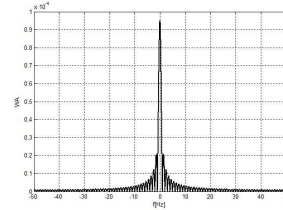
$$W_R(e^{j\omega}) = e^{-j\omega(N-1)/2} \frac{\sin(N\omega/2)}{\sin(\omega/2)}$$

$$W_R(e^{j\omega}) = e^{-j\omega(N-1)/2} \frac{\sin(N\omega/2)}{\sin(\omega/2)}$$

### TF dyskretnego okna prostokątnego III

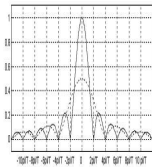


widmo amplitudowe  
dyskretnego okna  
prostokątnego  
(okresowe!!!!)



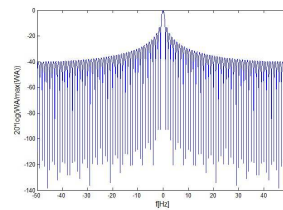
skala liniowa

dyskretnie okno prostokątne



skala logarytmiczna

$$F(\omega) = AT \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega T}{2}\right)$$



TF okna prostokątnego czasu ciągłego

### Wybrane układy dyskretnie



## Układ różnicy skończonej I-go rzędu

Aproksymacja pochodnej - skończona różnica pierwszego rzędu:

$$y(n)=x(n)-x(n-1) \quad \text{współczynniki odpowiedzi impulsowej } 1, -1$$

Transformata Z

$$Y(z)=X(z)-X(z)z^{-1}$$

$$H(z)=1-z^{-1}$$

**Charakterystyka częstotliwościowa**

$$H(e^{j\omega})=1-e^{-j\omega}=1-\cos\omega+j\sin\omega=e^{-j\omega/2}(e^{j\omega/2}-e^{-j\omega/2})=e^{-j\omega/2}(j2\sin(\omega/2))=e^{(-j\omega/2+\pi/2)}2\sin(\omega/2)$$

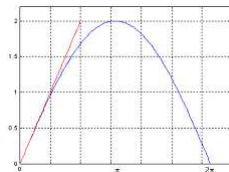
**Moduł**

$$|H(e^{j\omega})|=[(1-\cos\omega)^2+\sin^2\omega]^{1/2}=[1-2\cos\omega+\cos^2\omega+\sin^2\omega]^{1/2}=[2-2\cos\omega]^{1/2}=|2\sin(\omega/2)|$$

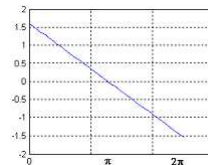
**Faza**

$$\arg(H(e^{j\omega}))=\arctg(\sin\omega/(1-\cos\omega))=\arctg(\ctg(\omega/2))=\arctg(\tg(\pi/2-\omega/2))=\pi/2-\omega/2$$

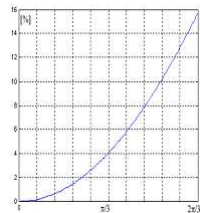
## Układ różnicy skończonej I-go rzędu



Moduły charakterystyk częstotliwościowych układu różnicy skończonej pierwszego rzędu oraz idealnego układu różniczkującego. Zakres 0-fs

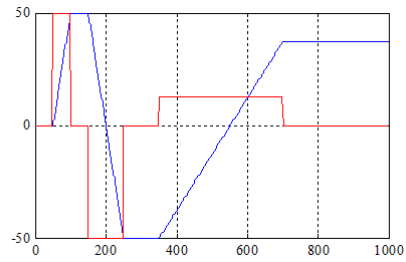


faza charakterystyki częstotliwościowej układu różnicy skończonej pierwszego rzędu. Zakres 0-fs

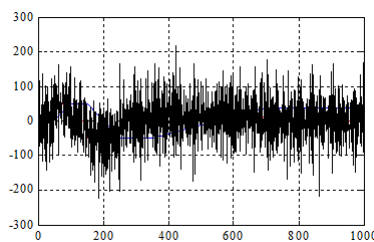
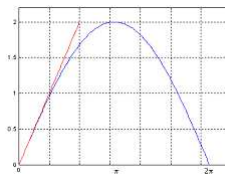
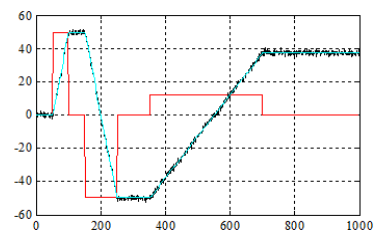


Różnica między modułami charakterystyk częstotliwościowych układu różnicy skończonej pierwszego rzędu oraz idealnego układu różniczkującego. Zakres 0-fs/3

## Wyznaczanie pochodnych I-go rzędu

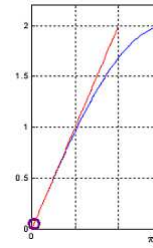
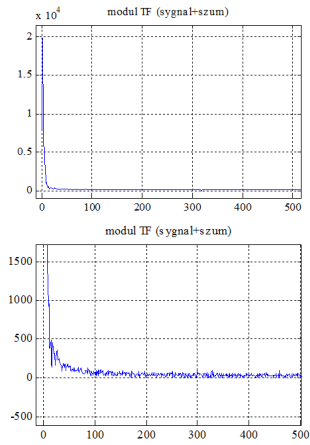


## Wyznaczanie pochodnych I-go rzędu

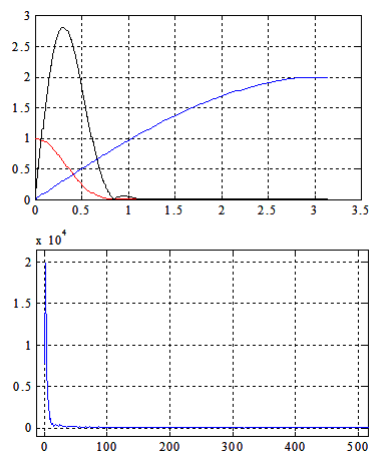
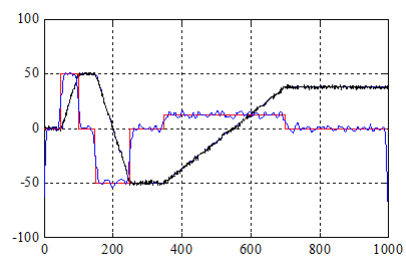


Moduły charakterystyk częstotliwościowych układu różnicy skończonej pierwszego rzędu oraz idealnego układu różniczkującego. Zakres 0-fs

## Wyznaczanie pochodnych I-go rzędu



## Wyznaczanie pochodnych I-go rzędu



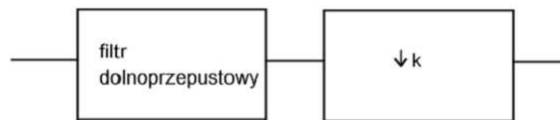
## Układ obniżający częstotliwość próbkowania (decymator)

Układ decymujący - obniża częstotliwość próbkowania zadaną liczbę razy

Zastosowanie - produkt przetwarzania staje się silnie przepróbkowany (np. częstotliwość próbkowania wynosi 50x częstotliwość Nyquista). Jest tak np. przy wyznaczeniu przemieszczenia ruchomego obiektu w oparciu o zjawisko Dopplera. W efekcie musimy przechowywać nadmierną liczbę próbek – redundancja.

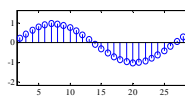
Uwaga – zabieg przerzedzania powinien być poprzedzony filtracją dolnoprzepustową filtrem o częstotliwości granicznej niższej niż połowa częstotliwości próbkowania po decymacji.

Decymacja kaskadowa – jeśli konieczna wysoka krotność decymacji

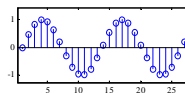


## Układ decymujący

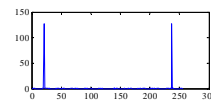
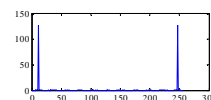
decymacja 2x – wybór co drugiej próbki sygnału, czyli obniżenie częstotliwości próbkowania (downsampling)



sygnał  $\sin(2 \cdot \pi \cdot (t-1) \cdot 40/1024)$



Sygnał przed (górną) i po (dolną) decymacji 2x



Moduł DTF sygnału przed i po decymacji 2x. Zakres częstotliwości 0-f. próbkowania

Widoczny 2x wzrost stosunku częstotliwości sygnału do f. próbkowania, który wynika z 2x spadku f. próbkowania (skalowanie osi f w jednostkach względnych)

## Układ decymujący (decymator) 2x

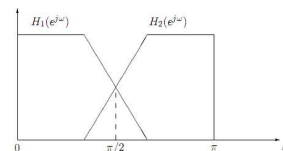
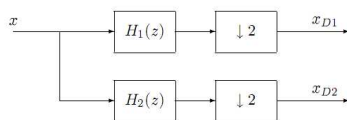


Równanie decymatora 2x  $y(m) = x(2m)$

jego TF  $Y(\omega) = \frac{1}{2}[X(\omega/2) + X(\pi + \omega/2)] = \frac{1}{2}[X(\omega/2) + X^*(\pi - \omega/2)]$

## Bank filtrów do dekompozycji sygnału na podpasma

Filtr dolnoprzepustowy  $H_1$  o pasmie do  $\pi/2$  oraz filtr górnoprzepustowy  $H_2$  o pasmie powyżej  $\pi/2$ . Pasma sygnału ograniczone jest do  $\pi$  (tw. Nyquista). Po każdej filtracji następuje 2x decymacja.



↓2 - oznacza dwukrotną decymację  
(odrzućcie co drugą próbkę - 2x obniżenie fs)

## Bank filtrów - dekompozycja sygnału na podpasma

TF ciągu wyjściowego decymatora:

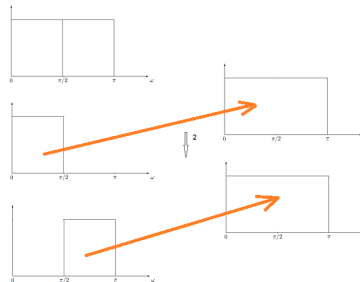
$$Y(\omega) = \frac{1}{2}[X(\omega/2) + X^*(\pi - \omega/2)]$$

Moduły TF

Moduł widma ciągu wejściowego decymatora (pasmo od 0 do  $\pi$ )

Podział pasma, decymacja części dolnej widma

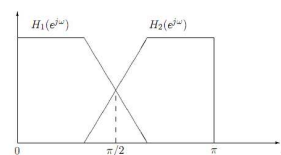
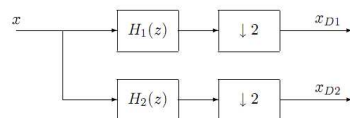
Podział pasma, decymacja części górnej widma



$$Y(0) = \frac{1}{2}[X(0) + X^*(\pi)] = \frac{1}{2}X^*(\pi) \Rightarrow |Y(0)| = \frac{1}{2}|X^*(\pi)| = \frac{1}{2}|X(\pi)|$$

$$Y(\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{2}[X(\frac{\pi}{4}) + X^*(\pi - \frac{\pi}{4})] = \frac{1}{2}[X^*(\frac{3\pi}{4})] \Rightarrow |Y(\frac{\pi}{2})| = \frac{1}{2}|X^*(\frac{3\pi}{4})| = \frac{1}{2}|X(\frac{3\pi}{4})|$$

## Bank filtrów do dekompozycji sygnału na podpasma

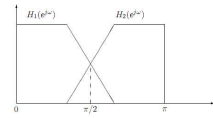
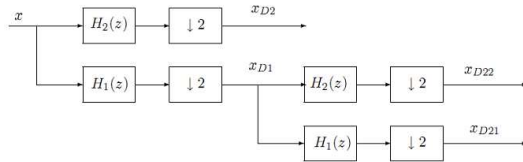


Z punktu widzenia bieżącej częstotliwości próbkowania (po decymacji) pasma sygnałów na wyjściu każdego z filtrów są takie same i wynoszą:

$$0 \leq \omega < \pi$$

Jednak z punktu widzenia podziału sygnału  $x$  na podpasma każdy z sygnałów wyjściowych  $x_D$  zawiera inne podpasmo sygnału  $x$ !!!

## Bank filtrów - dekompozycja sygnału na podpasma cd.



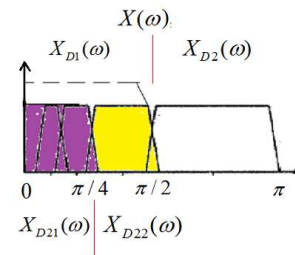
**Sygnal**                      **podpasmo x**

$$X_{D2}(\omega) \quad \pi/2 \leq \omega \leq \pi$$

$$X_{D1}(\omega) \quad 0 \leq \omega \leq \pi/2$$

$$X_{D22}(\omega) \quad \pi/4 \leq \omega \leq \pi/2$$

$$X_{D21}(\omega) \quad 0 \leq \omega \leq \pi/4$$



## Układ interpolujący (interpolator)

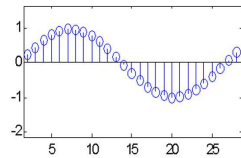
Układ podnoszący częstotliwość próbkowania przez wstawienie zer między próbki istniejącego sygnału i filtrację dolnoprzepustową (najprostsza metoda).

Inne metody – aproksymacja wielomianowa, funkcje sklejane



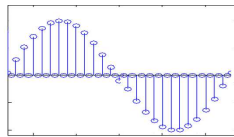
## Układ interpolujący (interpolator)

Przykład:  
 $h = \sin(2\pi \cdot (t-1) \cdot 40/1024)$ ;  
 interpolacja zerami 2x

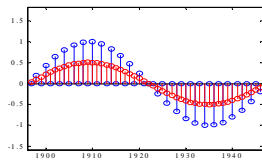


sygnał przed interpolacją  
i moduł jego DFT

$$f_1 \cong 0.1 \text{ fs}$$

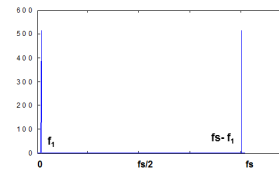
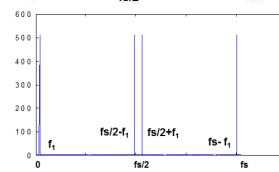
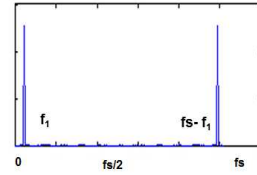


sygnał interpolowany  
i moduł jego DFT



sygnał interpolowany przed  
filtracją (niebieski) i po  
filtracji (czerwony);  
moduł DFT sygnału po filtracji

Ponieważ podwojono  $f_s$ ,  
zmianie ulega relacja  
 $f_1$  i  $f_s - f_1 \cong 0.05 f_s$



## Układ interpolujący 2x (interpolator)



ciąg  $x(n)$

$$x(k) = x(0) + x(k-1) + x(k-2) + \dots + x(k-n) + \dots$$

ciąg  $y(n)$

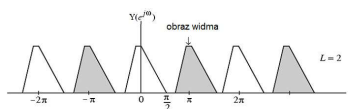
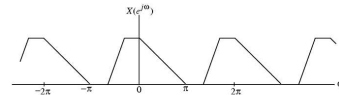
$$y(k) = x(0) + 0 + x(k-2) + 0 + x(k-4) + \dots + 0 + x(k-2m) + \dots$$

Przekształcenie Z ciągu  
y dla interpolatora 2x

$$Y(z) = X(0) + X(1)z^{-2} + X(2)z^{-4} + \dots + X(m)z^{-2m} = X(z^2)$$

TF ciągu y dla 2x  
interpolacji

$$Y(\omega) = X(2\omega) = X(2\omega - 2\pi) = X^*(2(\pi - \omega))$$



Moduł widma sygnału po 2x interpolacji.

Zaznaczony kolorem szarym tzw. obraz widma  
eliminuje się drogą filtracji dolnoprzepustowej.