PROGRAM ROZWOJOWY POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

PRZETWARZANIE SYGNAŁÓW

SEMESTR V

Człowiek- najlepsza inwestycja

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

PROGRAM ROZWOJOWY POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

Wykład V

Podstawowe wiadomości o filtrach

Ciągi dyskretne i układy liniowe niezmienne względem przesunięcia

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

PROGRAM ROZWOJOWY
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

Podstawowe wiadomości o filtrach

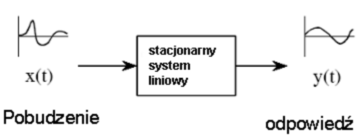
KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

PROGRAM ROZWOJOWY
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

Układ (system) liniowy stacjonarny

Układ liniowy stacjonarny, sygnał wejściowy x(t), sygnał wyjściowy y(t) opis - transmitancja T:



$y(t)=T[x(t)]$

układ liniowy $T[Ax_1(t) + Bx_2(t)]=AT[x_1(t)] + BT[x_2(t)]$

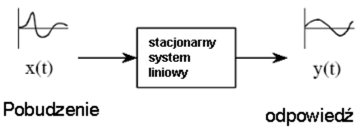
układ stacjonarny **jeśli** $y(t)=T[x(t)]$, **to** $y(t-t_0)=T[x(t-t_0)]$

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Układ (system) liniowy stacjonarny

Układ liniowy, stacjonarny, opisany w dziedzinie czasu przez odpowiedź impulsową h(t) – jego sygnał wyjściowy jest splotem sygnału wejściowego (pobudzenia) i odpowiedzi impulsowej układu:



$$y(t)=\int_0^t x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

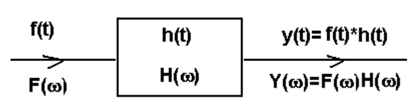
odpowiedź impulsowa układu – odpowiedź układu na pobudzenie impulsem Diraca usytuowanym w początku układu:

$$h(t)=\int_0^t \delta(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

PROGRAM ROZWOJOWY
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

Układ (system) liniowy stacjonarny

Opisany w dziedzinie czasu przez odpowiedź impulsową h(t) i w dziedzinie częstotliwości przez funkcję przenoszenia H(ω) – zastosowanie twierdzenia o transformacie splotu funkcji



pobudzenie $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$

odpowiedź $y(t) \leftrightarrow Y(\omega)$

Opis w dziedzinie czasu

$$y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

Opis w dziedzinie częstotliwości

$$Y(\omega)=F(\omega)H(\omega)$$

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

PROGRAM ROZWOJOWY POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

Filtry

Filtr - układ o określonych właściwościach częstotliwościowych

Rola – kształtowanie pasma sygnału (eliminacja zakłóceń, poprawa S/N, spełnienie wymagań twierdzenia o próbkowaniu)

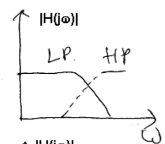
Narzędzia opisu – transformacja Laplace'a, transformacja Fouriera

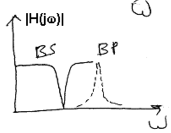
Odpowiedź częstotliwościowa jest TF odpowiedzi impulsowej i wartością transmitancji H(s) układu dla s=jω

$$H(j\omega) = H(s)\big|_{s=j\omega}$$

Filtry

- **dolnoprzepustowe LP**
- **górnoprzepustowe HP**
- **pasmowoprzepustowe BP**
- **pasmowozaporowe BS**
- **wszechprzepustowe**





KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

PROGRAM ROZWOJOWY POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

Opis i parametry filtru

- **odpowiedź częstotliwościowa** $$H(j\omega) = H(s)\big|_{s=j\omega} = \frac{H_0}{-\omega^2 + \frac{\omega_0}{Q} j\omega + \omega_0^2}$$

- **charakterystyka amplitudowa (moduł odpowiedzi częstotliwościowej)** $|H(j\omega)|$
  częstotliwość graniczna, środkowa, pasmo)

- **charakterystyka fazowa** $\phi = \arg(H(j\omega))$

- **opóźnienie fazowe t_p** $t_p = -\frac{\phi}{\omega}$

- **opóźnienie grupowe t_g** $t_g = -\frac{d\phi}{d\omega}$

- **dobroć/współczynnik tłumienia (Q=1/2ξ)**

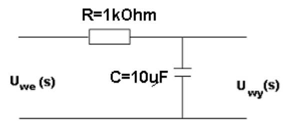
- **inne (rząd filtru, nachylenie modułu charakterystyki częstotliwościowej, odpowiedź skokowa, wzmocnienie)**

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

Przykład

Filtr dolnoprzepustowy rzędu 1



transmitancja

$$H(s)=\frac{\frac{1}{sC}}{R+\frac{1}{sC}}=\frac{\frac{1}{RC}}{s+\frac{1}{RC}}=\frac{\omega_0}{s+\omega_0}=\frac{100}{s+100}$$

odpowiedź częstotliwościowa

$$H(j\omega)=\frac{\omega_0}{j\omega+\omega_0}=\frac{100}{j\omega+100}$$

moduł odpowiedzi (ch-ka amplitudowa)

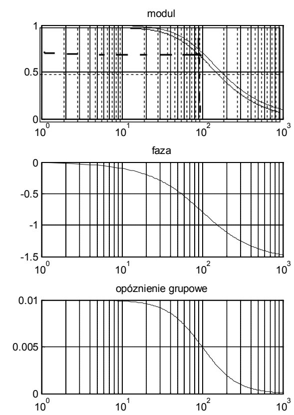
$$|H(j\omega)|=\frac{\omega_0}{|j\omega+\omega_0|}=\frac{\omega_0}{\sqrt{\omega^2+\omega_0^2}}=\frac{100}{\sqrt{\omega^2+100^2}}$$

Charakterystyka fazowa

$$\arg(H(j\omega))=-arctg(\frac{\omega}{\omega_0})$$

opóźnienie grupowe

$$t_g=-\frac{d(arctg(\frac{\omega}{\omega_0}))}{d\omega}=\frac{\omega_0}{1+(\frac{\omega}{\omega_0})^2}$$

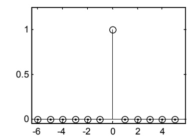


Ciągi dyskretne i układy liniowe niezmienne względem przesunięcia

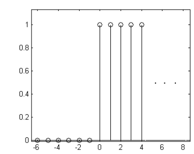
Ciągi dyskretne

Ciągi dyskretne (ciągi próbek sygnałów, wyniki symulacji)

notacja: x(n) x[n] x_n x{n}, n ε N

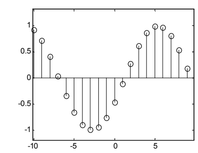


ciąg impulsowy δ(n): δ(n)=1 dla n=0 i 0 dla n (delta Kroneckera) pozostałych



ciąg skokowy u(n) : u(n)=1 dla n≥0 i 0 dla pozostałych

czyli δ(n)=u(n)-u(n-1)



ciąg sinusoidalny x(n)=asin(ωn+φ)

Ciągi dyskretne

operacje na ciągach dyskretnych:

- iloczyn i suma, mnożenie przez stałą
- opóźnienie (przesunięcie)
- splot

ciąg przyczynowy – wartości niezerowe dla n>=0

splot dwóch ciągów z(n)=x(n)*y(n)

$$z(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)y(n-k) = \sum_{k=k_0}^{k_1} x(k)y(n-k)$$

Dowolny ciąg dyskretny można przedstawić jako sumę poprzesuwanych i pomnożonych przez odpowiednie stałe ciągów impulsowych:

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \delta(n-k)$$

Ciągi dyskretne

Przykład obliczania splotu:

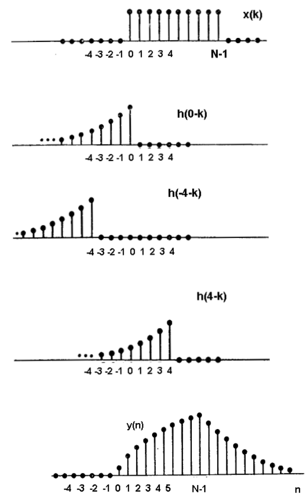
x(n)=u(n)- n(n-N) oraz h(n)=a^n, a<1, n>=0

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k) = \sum_{k=k_0}^{k_1} x(k)h(n-k)$$

$$y(0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(-k) \qquad y(1) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(1-k) \qquad y(2) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)y(2-k)$$

dla 0≤n<N $$y(n) = \sum_{k=0}^{n} a^{n-k} = a^n \frac{1-a^{-(n+1)}}{1-a^{-1}}$$

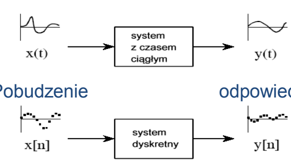
dla n≥N $$y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} a^{n-k} = a^n \frac{1-a^{-N}}{1-a^{-1}}$$



Układy liniowe stacjonarne

Układ liniowy analogowy, stacjonarny - sygnał wyjściowy jest splotem pobudzenia i odpowiedzi impulsowej układu:

$$y(t) = \int_0^t x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$



Odpowiednikiem dyskretnym takiego układu jest dyskretny (cyfrowy) układ liniowy o stałych współczynnikach, niezmienny względem przesunięcia, jego sygnałem wejściowym i wyjściowym są ciągi dyskretne (dalej – układ LNP).

Opis - transmitancja T:

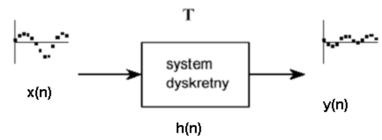
y(n)=T[x(n)]

układ liniowy $T[Ax_1(n) + Bx_2(n)]=AT[x_1(n)] + BT[x_2(n)]$

niezmienny względem przesunięcia $y(n)=T[x(n)]$, to $y(n-n_0)=T[x(n-n_0)]$

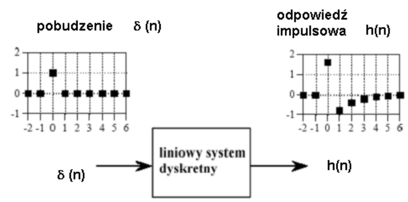
Układy LNP

analogicznie jak w przypadku układów analogowych sygnał wyjściowy y(n) jest splotem (dyskretnym) sygnału wejściowego x(n) i odpowiedzi impulsowej układu h(n):



$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k)$$

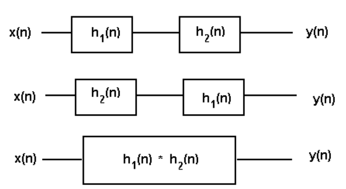
układ stabilny $\sum_{k=-\infty}^{\infty} | h(k) | < \infty$



układ nazywamy przyczynowym, jeśli dla k<0 h(k)=0

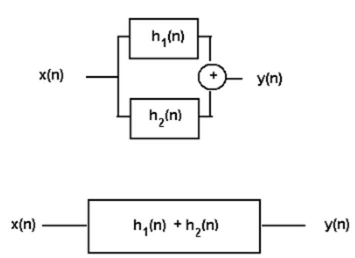
UWAGA: algorytm cyfrowego przetwarzania sygnałów (obrazów) odpowiada pewnemu układowi LNP !!!!

Łączenie układów LNP



połączenie kaskadowe (łańcuchowe) układów o odpowiedziach impulsowych $h_1(n)$ i $h_2(n)$

$h(n)= h_1(n) * h_2(n) = h_2(n) * h_1(n)$



połączenie równoległe

$h(n)= h_1(n) + h_2(n)$

Transformacja Z

Odpowiednik transformacji Laplace'a dla układów analogowych (z czasem ciągłym)

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n} \qquad z=re^{j\omega} \qquad X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) r^{-n} e^{-jn\omega}$$

notacja Z[x(n)]=X(z)

warunek istnienia TZ - bezwzględna sumowalność ciągu $|x(n)|r^{-n}$:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| r^{-n} < \infty$$

gdy r=1, czyli $z=e^{j\omega}$ (na tzw. okręgu jednostkowym - odpowiednik osi jω w transformacji Laplace'a) – dyskretna transformacja Fouriera DTF

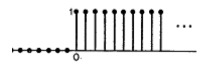
$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-jn\omega}$$

Transformacja Z

Właściwości TZ:

- liniowość Z[Ax(n) + By(n)]=AX(z) + BY(z)
- przesunięcie ciągu $Z[x(n+n_0)] = z^{n_0} X(z)$
- splot ciągów Z[x(n)*y(n)]=X(z)Y(z)
- mnożenie przez ciąg wykładniczy $Z[a^n x(n)] = X(a^{-1}z)$

Transformacja Z - przykłady



Ciąg x(n)=u(n) – ciąg skokowy

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}u(n)z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}z^{-n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-z^{-n}}{1-z^{-1}}=\frac{1}{1-z^{-1}}$$

szereg jest zbieżny dla $|z^{-1}|<1$, czyli $|z|>1$ - obszar istnienia TZ - poza okręgiem jednostkowym na płaszczyźnie Z

przyczynowy ciąg wykładniczy $x(n)=a^n u(n)$, $a<1$

Transformata Z ciągu:

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a^n u(n)z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}a^n z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}(az^{-1})^n=\lim_{n\to\infty}\frac{1-(az^{-1})^n}{1-az^{-1}}=\frac{1}{1-az^{-1}}$$

Granica tego ciągu istnieje (szereg jest zbieżny) dla $|az^{-1}|<1$, czyli $|z|>a$

Natomiast ciąg $x(n)=a^n u(-n)$ o wyrazach niezerowych dla $n<0$, jest zbieżny dla $|z|<a$;

Transformacja Z

Równanie opisujące działanie układu LNP:

$$y(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k)h(n-k)=x(n)*h(n)$$

to transformata Z takiego równania (czyli równanie opisujące działanie układu w dziedzinie z) ma postać:

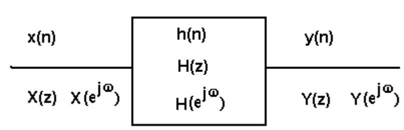
$$Y(z)=X(z)H(z)$$

gdzie:

X(z) - TZ ciągu wejściowego (pobudzenia)

Y(z) - TZ ciągu wyjściowego (odpowiedzi)

H(z) - TZ odpowiedzi impulsowej układu



Na okręgu jednostkowym obowiązuje:

$$Y(e^{j\omega})=H(e^{j\omega})X(e^{j\omega})$$

PROGRAM ROZWOJOWY POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

Reprezentacja częstotliwościowa ciągów dyskretnych

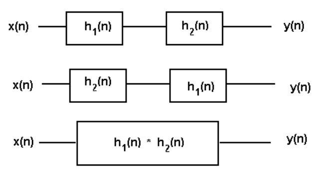
ciąg wykładniczy $x(n)=\exp(j\omega n)$

odpowiedź układu LNP na taki sygnał jest następująca:

$$y(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}h(k)\exp(j\omega(n-k))=\exp(j\omega n)\sum_{k=-\infty}^{\infty}h(k)\exp(-j\omega k)=\exp(j\omega n)H(e^{j\omega})$$

przy czym $$H(e^{j\omega})=\sum_{k=-\infty}^{\infty}h(k)\exp(-j\omega k)$$

Wyrażenie to jest TF ciągu h(n), nazywamy je charakterystyką częstotliwościową układu o odpowiedzi impulsowej h(n). Jest to zarazem TZ odpowiedzi impulsowej tego układu wyznaczona na okręgu jednostkowym ($z=e^{j\omega}$).



Odpowiedź częstotliwościowa połączenia kaskadowego układów LNP jest iloczynem odpowiedzi częstotliwościowych poszczególnych członów

$h(n)=h_1(n)*h_2(n) \leftrightarrow H(e^{j\omega})=H_1(e^{j\omega})H_2(e^{j\omega})$

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

PROGRAM ROZWOJOWY POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

Reprezentacja częstotliwościowa ciągów dyskretnych

TF ciągu h(n) - charakterystyka częstotliwościowa układu o odpowiedzi impulsowej h(n):

$$H(e^{j\omega})=\sum_{k=-\infty}^{\infty}h(k)\exp(-j\omega k)$$

Zapis: $$H(e^{j\omega})=|H(e^{j\omega})|\,e^{j\arg(H(e^{j\omega}))}$$

$|H(e^{j\omega})|$ - moduł charakterystki częstotliwościowej (ch-ka amplitudowa)

$\arg(H(e^{j\omega})|$ - faza charakterystyki częstotliwościowej (ch-ka fazowa)

Opóźnienie grupowe wprowadzane przez układ: $$\tau(e^{j\omega})=-\frac{d(\arg(H(e^{j\omega}))}{d\omega}$$

Parametry - okresowe z okresem 2π!!!!!

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

Równania różnicowe o stałych współczynnikach

Opis przyczynowych układów LNP – równania różnicowe jak obok, które wiążą ze sobą zbiory próbek wejściowych x(n-r) i wyjściowych y(n-k) z użyciem odpowiednich współczynników, właściwych dla danego układu

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k) = \sum_{r=0}^{M} b_r x(n-r)$$

$$y(n) = -\sum_{k=1}^{N} \frac{a_k}{a_0} y(n-k) + \sum_{r=0}^{M} \frac{b_r}{a_0} x(n-r)$$

Powyższa postać określa wartość bieżącej próbki ciągu wyjściowego układu LNP

Jeśli dla k>0 a_k=0, mamy do czynienia z tzw. układem o skończonej odpowiedzi impulsowej SOI (albo FIR - Finite Impulse Response). Równanie różnicowe przyjmuje postać:

$$y(n) = \sum_{r=0}^{M} \frac{b_r}{a_0} x(n-r) = \sum_{r=0}^{M} h(r)x(n-r) = h(n) * x(n)$$

współczynniki odpowiedzi impulsowej układu są równe h(n)=b_n/a_0.

Jeśli dla k>0 $a_k \neq 0$ – układ o nieskończonej odpowiedzi impulsowej NOI (albo IIR Infinite Impulse Response). Odpwiedź impulsowa nie jest określona w jawny sposób.

PROGRAM ROZWOJOWY
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

Równania różnicowe o stałych współczynnikach

Do równania różnicowego opisującego układ LNP możemy zastosować TZ:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k) = \sum_{r=0}^{M} b_r x(n-r)$$

$$Z[x(n+n_0)] = z^{n_0} X(z)$$

$$\sum_{k=0}^{N} a_k Y(z) z^{-k} = \sum_{r=0}^{M} b_r X(z) z^{-r}$$

i dalej

$$Y(z)\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k} = X(z)\sum_{r=0}^{M} b_r z^{-r}$$

i otrzymać wyrażenie przedstawiające funkcję przenoszenia układu – jego transmitancję (transformatę Z odpowiedzi impulsowej układu):

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{r=0}^{M} b_r z^{-r}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}}$$

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Transformacja Z równania różnicowego

transmitancja układu LNP (transformata Z odpowiedzi impulsowej):

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{\sum_{r=0}^{M} b_r z^{-r}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}}$$

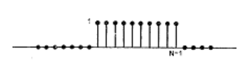
Dla $z=e^{j\omega}$ otrzymamy TF odpowiedzi impulsowej układu (filtru), czyli jego odpowiedź częstotliwościową:

$$H(e^{j\omega})=\frac{\sum_{r=0}^{M} b_r e^{-j\omega r}}{\sum_{k=0}^{N} a_k e^{-j\omega k}} \qquad H(e^{j\omega})=|H(e^{j\omega})|\,e^{j\arg(H(e^{j\omega}))}$$

PROGRAM ROZWOJOWY
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

Przykłady układów SOI i NOI

Układ o odpowiedzi impulsowej:
$h(n)=1$ dla $0 \le n \le N-1$, 0 dla pozostałych - układ SOI



odpowiedź częstotliwościowa:

$$H(e^{j\omega})=\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)\exp(-j\omega k)=\sum_{k=0}^{N-1}\exp(-j\omega k)=\frac{1-e^{-j\omega N}}{1-e^{-j\omega}}=\frac{e^{-j\omega N/2}(e^{j\omega N/2}-e^{-j\omega N/2})}{e^{-j\omega/2}(e^{j\omega/2}-e^{-j\omega/2})}=\frac{\sin(\omega N/2)}{\sin(\omega/2)}e^{-j(N-1)\omega/2}$$

moduł $|H(e^{j\omega})|=\left|\frac{\sin(\omega N/2)}{\sin(\omega/2)}\right|$

faza $\arg(H(e^{j\omega}))=-(N-1)\omega/2$

opóźnienie $\tau(e^{j\omega})=(N-1)/2$

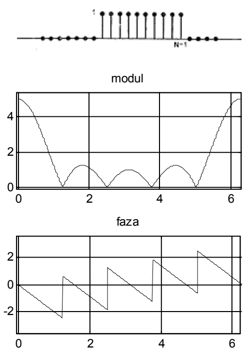
równanie różnicowe $y(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k)=\sum_{k=0}^{N-1} x(k)$

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

PROGRAM ROZWOJOWY POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

Przykłady układów SOI i NOI

Układ SOI
h(n)=1 dla 0≤n ≤N –1, 0 dla pozostałych



moduł $|H(e^{j\omega})| = |\dfrac{\sin(\omega N/2)}{\sin(\omega/2)}|$

faza $\arg(H(e^{j\omega})) = -(N-1)\omega/2$

Interpretacja: jest to układ, na którego wyjściu pojawia się suma N poprzednich próbek sygnału – układ uśrednia, a więc eliminuje wyższe składowe częstotliwościowe – stąd charakterystyka dolnoprzepustowa

Uwaga: parametry opisujące filtr (moduł, faza, opóźnienia) są okresowe z okresem 2π!!!!!

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

PROGRAM ROZWOJOWY POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

Przykłady układów SOI i NOI

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{r=0}^{M} b_r z^{-r}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}}$$

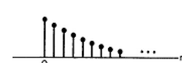
Układ opisany równaniem różnicowym y(n)=a y(n-1) + x(n)

jest to układ NOI

$$Z[x(n+n_0)] = z^{n_0} X(z)$$

Transmitancja układu $H(z) = \dfrac{1}{1-az^{-1}} = \dfrac{z}{z-a}$

Przy założeniu przyczynowości odpowiedź impulsowa ma postać h(n)=a^{n}u(n)



Charakterystyka częstotliwościowa układu $H(e^{j\omega}) = \dfrac{1}{1-ae^{-j\omega}} = \dfrac{e^{j\omega}}{e^{j\omega}-a}$

(okrąg jednostkowy – z=e$^{j\omega}$) – okresowa z okresem 2π!!!

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

PROGRAM ROZWOJOWY POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

Przykłady układów SOI i NOI

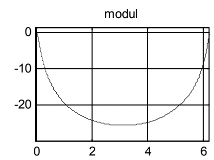
Układ NOI opisany równaniem różnicowym y(n)=a y(n-1) + x(n)

Charakterystyka częstotliwościowa układu

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1-ae^{-j\omega}} = \frac{e^{j\omega}}{e^{j\omega}-a}$$

moduł

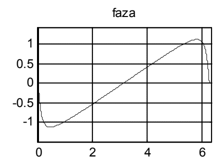
$$|H(e^{j\omega})| = \frac{1}{\sqrt{(\cos\omega - a)^2 + \sin^2\omega}} = \frac{1}{\sqrt{1+a^2-2a\cos\omega}}$$



faza

dla a=0.9

$$\arg(H(e^{j\omega})) = \omega - arctg\frac{\sin\omega}{\cos\omega - a}$$



KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

PROGRAM ROZWOJOWY POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

Układy SOI o liniowej charakterystyce fazowej

Filtry przyczynowe

Liniowa charakterystyka filtrów SOI – gdy odpowiedź impulsowa jest symetryczna

h(n)=h(N-1-n)

równanie różnicowe

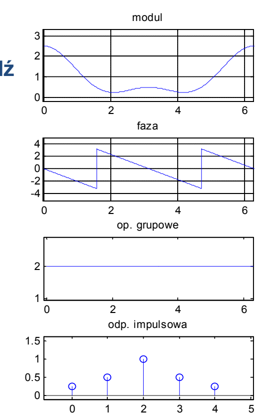
y(n)=0.25x(n)+0.5x(n-1)+x(n-2)+0.5x(n-3)+0.25x(n-4)

transmitancja

$$H(z)=0.25 +0.5z^{-1}+z^{-2}+0.5z^{-3}+0.25z^{-4}$$

Odpowiedź częstotliwościowa

$$H(e^{j\omega})=0.25 +0.5\, e^{-j\omega} + e^{-j2\omega}+0.5\, e^{-j3\omega}+0.25\, e^{-j4\omega}=$$
$$=e^{-j2\omega}[0.25\, e^{j2\omega} +0.5\, e^{j\omega} + 1+0.5\, e^{-j\omega}+0.25\, e^{-j2\omega}]=$$
$$= e^{-j2\omega}[0.5\cos 2\omega+\cos\omega +1]$$



Moduł odpowiedzi $|H(e^{j\omega})|=|0.5\cos 2\omega+\cos\omega +1|$

faza arg(H)= - 2ω !! **liniowa!!!**

opóźnienie grupowe 2 (próbki) **stałe!!**

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

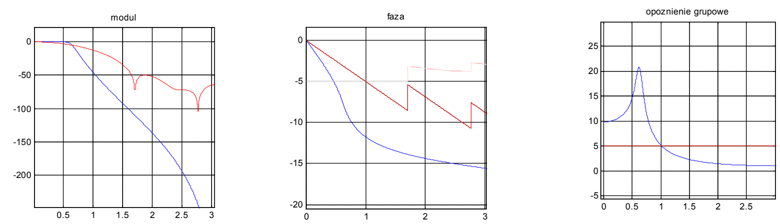
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

PROGRAM ROZWOJOWY
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

Porównanie właściwości układów SOI i NOI

Istotna właściwość układów SOI – mogą posiadać liniową charakterystykę fazową. Zaleta ta jest uzyskana za cenę gorszych właściwości charakterystyki amplitudowej w porównaniu z układami NOI, które przy tym samym rzędzie zapewnią znacznie większe tłumienie w pasmie zaporowym. Układy NOI mogą posiadać nieliniowe charakterystyki fazowe.

filtr SOI – rząd 10, f_g=0.2f_s filtr NOI – rząd 10, f_g=0.2f_s



NOI $y(n) = -\sum_{k=1}^{N} \frac{a_k}{a_0} y(n-k) + \sum_{r=0}^{M} \frac{b_r}{a_0} x(n-r)$

SOI $y(n) = \sum_{r=0}^{M} \frac{b_r}{a_0} x(n-r) = \sum_{r=0}^{M} h(r) x(n-r) = h(n) * x(n)$

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

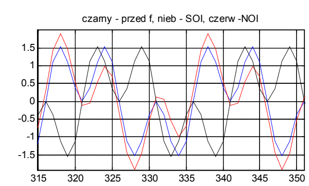
PROGRAM ROZWOJOWY
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

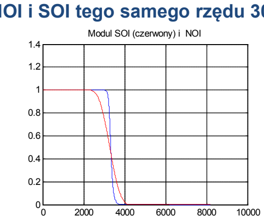
Porównanie właściwości układów SOI i NOI

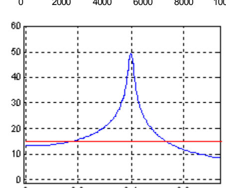
Skutki transmisji złożonych sygnałów przez układy oróżnych cechach opóźnienia grupowego

Sygnał złożony z dwóch składowych:
x=sin(2*pi*t*150)+sin(2*pi*t*50);

Filtry NOI i SOI tego samego rzędu 30





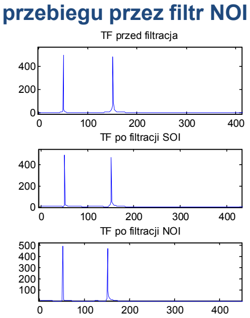


Zniekształcenia przebiegu przez filtr NOI

Widmo sygnału przed filtracją

po filtrze SOI

po filtrze NOI



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Metody projektowania filtrów cyfrowych

Filtr – algorytm przetwarzania opisany równaniem różnicowym,wykorzystywany w dziedzinie czasu (dyskretnego). Wymagania określane sa najczęściej w dziedzinie częstotliwości poprzez określenie parametrów takich jak pasmo przepustowe, pasmo przejściowe, granica pasma zaporowego, minimalne tłumienie w pasmie zaporowym. Na podstawie tych założeń należy wyznaczyć wartości współczynników filtru, czyli współczynników równania różnicowego.

Istnieją dwie grupy metod projektowania filtrów cyfrowych:

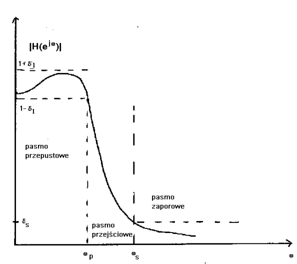
- **Metody wykorzystujące znane prototypy filtrów analogowych (NOI)**
- **Metody bezpośrednie - aproksymacja poszukiwanej charakterystyki (NOI, SOI)**

PROGRAM ROZWOJOWY
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

Metody projektowania filtrów cyfrowych

Założenia projektowe

- **częstotliwość graniczna pasma przepustowego**
- **rodzaj charakterystyki**
- **częstotliwość graniczna pasma zaporowego**
- **minimalne tłumienie w pasmie zaporowym**



Pozwala to zapisać dwa warunki na $|H(e^{j\omega})|$:

$$20\lg|H(e^{j\omega_p})| = \delta_1 \qquad 20\lg|H(e^{j\omega_s})| = \delta_s$$

Na podstawie tych warunków wyznacza się rząd filtru, a następnie współczynniki filtru – procedury projektowe np. w środowisku Matlab.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Projektowanie filtrów NOI

Metody wykorzystujące teorię analogowych układów liniowych

Metoda transformacji biliniowej

Znana jest transmitancja filtru analogowego $H_a(s)$

Dokonując podstawienia:

$$s = \frac{2}{T}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$$

uzyskujemy transmitancję H(z) odpowiadającego mu filtru dyskretnego. W celu uzyskania charakterystyki częstotliwościowej filtru dyskretnego podstawienie ma postać:

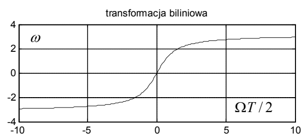
$$s = \frac{2}{T}\frac{1-e^{-j\omega}}{1+e^{-j\omega}} \qquad s = \sigma + j\Omega$$

Ω- pulsacja „analogowa”

ω - pulsacja „dyskretna”

Związek między obiema pulsacjami nie jest liniowy!

$$\omega = 2arctg(\Omega T/2)$$



Projektowanie filtrów NOI

Metody bezpośrednie – zadanie charakterystyki, optymalizacja parametrów równania

Minimalizacja błędu średniokwadratowego w dziedzinie częstotliwości: definiuje się przebieg charakterystyki amplitudowej filtru $|H_d(e^{j\omega})|$ dla zbioru M pulsacji $\{\omega_i\}$, a następnie dobiera współczynniki przedstawionej w następujący sposób charakterystyki filtru:

$$H(z) = A\prod_{k=1}^{K}\frac{1+a_k z^{-1}+b_k z^{-2}}{1+c_k z^{-1}+d_k z^{-2}}$$

by zminimalizować błąd średniokwadratowy:

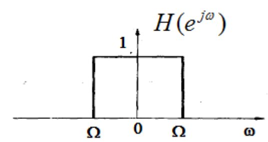
$$E = \sum_{i=1}^{M}[|H(e^{j\omega_i})| - |H_d(e^{j\omega_i})|]^2$$

minimalizacja –> parametry a_k, b_k, c_k,d_k.

Projektowanie filtrów SOI

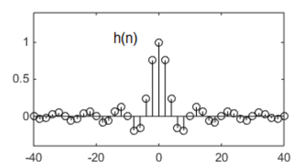
**Obcięcie odpowiedzi filtru NOI
i zastosowanie okna**

H – założona charakterystyka częstotliwościowa (np. idealny filtr dolnoprzepustowy - NOI – nie jest przyczynowy!!)



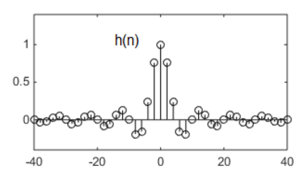
h(n) – odpowiedź impulsowa filtru NOI

$$h(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}H(e^{j\omega})\exp(j\omega n)d\omega$$



Odpowiedź tego filtru jest nieograniczona, przyjmuje wartości niezerowe dla n<0; aby filtr był realizowalny – musi być przyczynowy (niezerowe wartości h tylko dla n>=0), aby był to filtr SOI – należy zbiór niezerowych wartości h ograniczyć;

PROGRAM ROZWOJOWY
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ



Projektowanie filtrów SOI

Obcięcie odpowiedzi filtru NOI i zastosowanie okna

Odpowiedź tego filtru jest nieograniczona, przyjmuje wartości niezerowe dla n<0; aby filtr był realizowalny – musi być przyczynowy (niezerowe wartości h tylko dla n>=0), aby był to filtr SOI – należy zbiór niezerowych wartości h ograniczyć do pewnego N;

Należy przesunąć odpowiedź h(n) o (N-1)/2 próbek:

h(n-(N-1)/2)

a następnie ograniczyć jej długość do N próbek – czyli pomnożyć przez okno w(n) przyjmujące niezerowe wartości dla n=0, 1, ... N-1:

$h_1(n)=w(n)\ h(n-(N-1)/2)$ $\quad$ $w(n)\neq 0$ dla n=0, 1, ... N-1

Operacje te można wykonać w odwrotnej kolejności, tj. zastosować symetryczne okno w(n), a następnie przesunąć wynik mnożenia o (N-1)/2 próbek

Projektowanie filtrów SOI

Odpowiedź h(n) jest nieskończona i układ nie jest przyczynowy – należy przesunąć h(n) o (N-1)/2 próbek oraz ograniczyć czas trwania h(n) (okno). Wynikające z tych operacji transmitancje mają następujące postaci:

przesunięcie o (N-1)/2 $H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n - \frac{N-1}{2}) z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) z^{-\frac{N-1}{2}} z^{-n} = z^{-\frac{N-1}{2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) z^{-n}$

ograniczenie do N próbek

$h_1(n) = h(n-(N-1)/2)w(n) \qquad w(n) \neq 0 \quad dla \quad n \in [0, N-1] \quad i \quad 0 \quad poza$

$$H_1(z) = z^{-\frac{N-1}{2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)w(n)z^{-n} = z^{-\frac{N-1}{2}} \sum_{n=0}^{N-1} h(n)w(n)z^{-n} = z^{-\frac{N-1}{2}} H(z) * W(z)$$

$$H_1(e^{j\omega}) = e^{j\omega - \frac{N-1}{2}} H(e^{j\omega}) * W(e^{j\omega})$$

PROGRAM ROZWOJOWY
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

Projektowanie filtrów SOI

Obcięcie odpowiedzi filtru NOI i zastosowanie okna

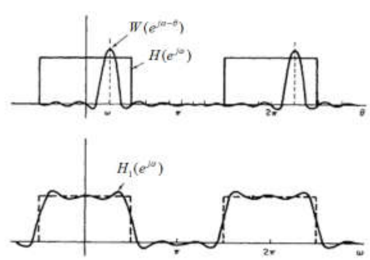
H – założona charakterystyka częstotliwościowa

H_1 – splot charakterystyki H z transformatą okna ograniczającego.

W – transformata Fouriera okna ograniczającego

$$H_1(e^{j\omega}) = e^{j\omega - \frac{N-1}{2}} H(e^{j\omega}) * W(e^{j\omega})$$

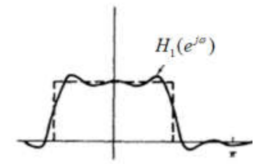
$$H_1(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} e^{j\omega - \frac{N-1}{2}} \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\theta}) W(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta$$



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Zastosowanie okien do obciętej odpowiedzi impulsowej filtru



- okno prostokątne

- okno Bartletta

w(n)=2n/(N-1),   n=0,1,...(N-1)/2

w(n)=2-2n/(N-1),   n=(N-1)/2,...N-1

- okno Hanna

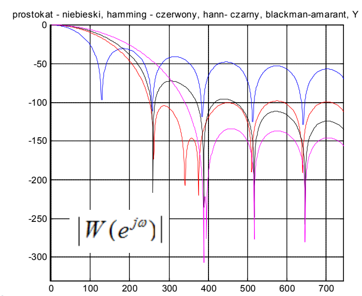
w(n)=0.5(1-cos(2 πn/(N-1))),   n=0,1,...N-1

- okno Hamminga

w(n)=0.54-0.46cos(2 πn/(N-1)),   n=0,1,...N-1

-okno Blackmana

w(n)=0.42+0.5cos(2πn/(N-1))+0.08cos(4πn/(N-1)),   n=0,1,...N-1



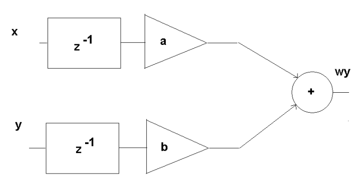
Zależnie od zastosowanego okna uzyskamy różny poziom listków bocznych i różną szerokość pasma przejściowego

PROGRAM ROZWOJOWY
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

Realizacje układów dyskretnych (filtrów cyfrowych)

Jak wynika z postaci równania różnicowego, układy liniowe dyskretne niezmienne względem przesunięcia można przedstawić w postaci schematów (grafów), posługując się elementami takimi jak blok opóźniający o 1 próbkę, węzeł sumacyjny i mnożenie przez stałą:

$$y(n) = -\sum_{k=1}^{N} a_k y(n-k) + \sum_{r=0}^{M} b_r x(n-r)$$



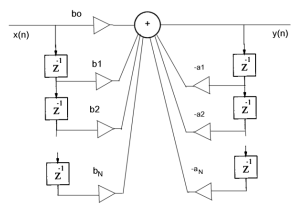
KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

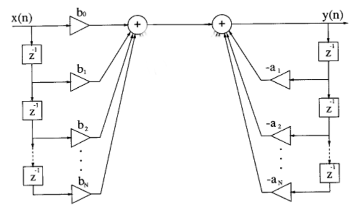
PROGRAM ROZWOJOWY
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

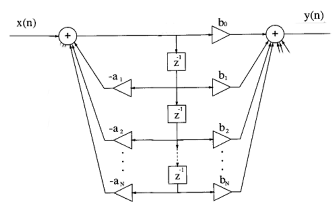
Realizacje filtrów cyfrowych

NOI realizacja bezpośrednia (M=N)

$$y(n) = -\sum_{k=1}^{N} a_k y(n-k) + \sum_{r=0}^{M} b_r x(n-r)$$







Filtr można traktować jako kaskadowe połączenie dwóch układów liniowych niezmiennych względem przesunięcia – można zamienić ich kolejność. Prowadzi to do tzw. kanonicznej postaci filtru:

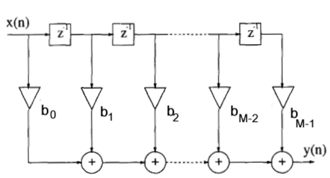
PROGRAM ROZWOJOWY
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

Realizacje filtrów cyfrowych

SOI

Realizacja bezpośrednia – wynika z równania

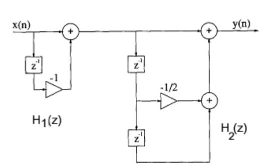
$$y(n) = \sum_{r=0}^{M} b_r x(n-r)$$



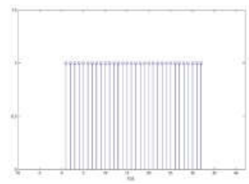
$$H(z) = \prod_{i=1}^{L} H_i(z)$$

Realizacja kaskadowa – wynik dekompozycji transmitancji na iloczyn składników drugiego i ew. pierwszego rzędu:

np. $H(z)=(1-z^{-1})\,(1-0.5z^{-1}+z^{-2}) = H_1(z)H_2(z)$



TF dyskretnego okna prostokątnego I



$$w_R(n)=\begin{cases}1, & \mathrm{n=0,1,2,...,N-1}\\ 0, & \text{pozostale n}\end{cases}$$

DTF $$X(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-j\omega n}$$

$$W_R(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}w_R(n)e^{-j\omega n}=\sum_{n=0}^{N-1}w_R(n)e^{-j\omega n}=\sum_{n=0}^{N-1}e^{-j\omega n}$$

gdzie ω=2πk/N⇔2π(f/f_p)

DTF – suma skończonego szeregu geometrycznego:

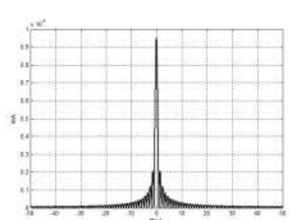
$$W_R(e^{j\omega})=\sum_{n=1}^{N-1}e^{-j\omega n}=\sum_{n=0}^{N-1}(e^{-j\omega})^n=\frac{1-(e^{-j\omega})^N}{1-e^{-j\omega}}$$

TF dyskretnego okna prostokątnego II

Z powyższych równań wynika:

$$W_R(e^{j\omega})=\sum_{n=1}^{N-1}e^{-j\omega n}=\sum_{n=0}^{N-1}(e^{-j\omega})^n=\frac{1-(e^{-j\omega})^N}{1-e^{-j\omega}}=$$

$$=\frac{(e^{-j\omega})^{N/2}}{e^{-j\omega/2}}\frac{(e^{j\omega})^{N/2}-(e^{-j\omega})^{N/2}}{e^{-j\omega/2}-e^{-j\omega/2}}=\frac{(e^{-j\omega})^{N/2}}{e^{-j\omega/2}}\frac{2j\sin(N\omega/2)}{2j\sin(\omega/2)}=(e^{-j\omega})^{(N-1)/2}\frac{\sin(N\omega/2)}{\sin(\omega/2)}$$



widmo amplitudowe dyskretnego okna prostokątnego (okresowe!!!!)

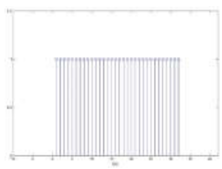
skala liniowa

$$W_R(e^{j\omega})=e^{-j\omega(N-1)/2}\frac{\sin(N\omega/2)}{\sin(\omega/2)}$$

PROGRAM ROZWOJOWY
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

$$W_R(e^{j\omega}) = e^{-j\omega(N-1)/2}\frac{\sin(N\omega/2)}{\sin(\omega/2)}$$

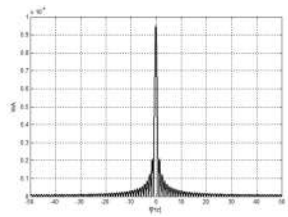
TF dyskretnego okna prostokątnego III

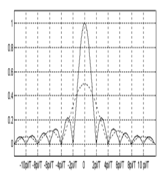


dyskretne okno prostokątne

widmo amplitudowe dyskretnego okna prostokątnego (okresowe!!!!)

skala liniowa

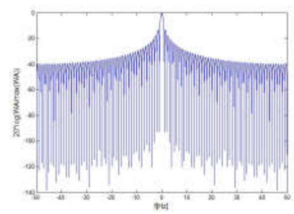




$$F(\omega) = AT\sin c(\frac{\omega T}{2})$$

TF okna prostokątnego czasu ciągłego

skala logarytmiczna



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

PROGRAM ROZWOJOWY
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

Wybrane układy dyskretne

48

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Układ różnicy skończonej I-go rzędu

Aproksymacja pochodnej - skończona różnica pierwszego rzędu:

$y(n)=x(n)-x(n-1)$ współczynniki odpowiedzi impulsowej 1, -1

Transformata Z $Y(z)=X(z)-X(z)z^{-1}$ $H(z)=1-z^{-1}$

Charakterystyka częstotliwościowa

$H(e^{j\omega})=1-e^{-j\omega}=1-\cos\omega+j\sin\omega=e^{-j\omega/2}(e^{j\omega/2}-e^{-j\omega/2})=e^{-j\omega/2}(j2\sin(\omega/2)=e^{(-j\omega/2+\pi/2)}2\sin(\omega/2)$

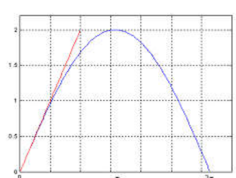
Moduł

$|H(e^{j\omega})|=[(1-\cos\omega)^2+\sin\omega^2]^{1/2}=[1-2\cos\omega+\cos\omega^2+\sin\omega^2]^{1/2}=[2-2\cos\omega]^{1/2}=|2\sin(\omega/2)|$

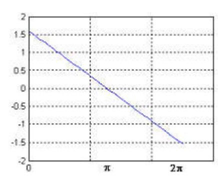
Faza

$\arg(H(e^{j\omega}))=\mathrm{arctg}(\sin\omega/(1-\cos\omega))=\mathrm{arctg}(\mathrm{ctg}(\omega/2))=\mathrm{arctg}(\mathrm{tg}(\pi/2-\omega/2))=\pi/2-\omega/2$

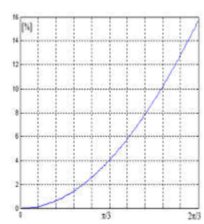
Układ różnicy skończonej I-go rzędu



Moduły charakterystyk częstotliwościowych układu różnicy skończonej pierwszego rzędu oraz idealnego układu różniczkującego (linia prosta o nachyleniu f). Zakres 0-fs



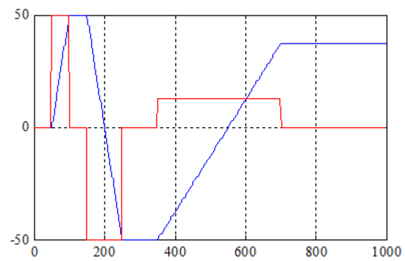
Faza charakterystyki częstotliwościowej układu różnicy skończonej pierwszego rzędu. Zakres 0-fs



Różnica między modułami charakterystyk częstotliwościowych układu różnicy skończonej pierwszego rzędu oraz idealnego układu różniczkującego. Zakres 0-fs/3

PROGRAM ROZWOJOWY
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

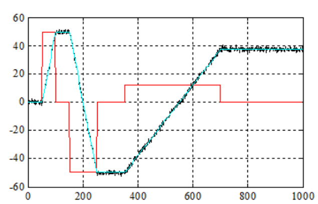
Wyznaczanie pochodnych I-go rzędu



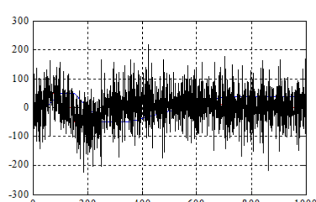
Przebieg trapezowy i jego pochodna

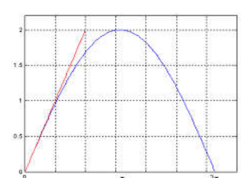
PROGRAM ROZWOJOWY
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

Wyznaczanie pochodnych I-go rzędu



Przebieg trapezowy z szumem i jego pochodna (poniżej); powyżej – oczekiwany wynik różniczkowania (wykres czerwony).

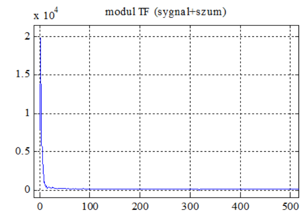




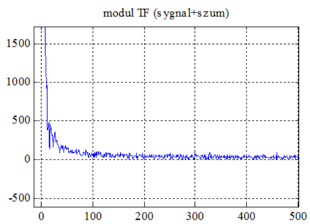
Moduły charakterystyk częstotliwościowych układu różnicy skończonej pierwszego rzędu oraz idealnego układu różniczkującego. Zakres 0-fs

PROGRAM ROZWOJOWY POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

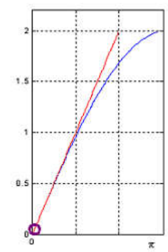
Wyznaczanie pochodnych I-go rzędu



Transformata Fouriera przebiegu trapezowego



Transformata Fouriera przebiegu trapezowego z szumem. Zakres 0-fs/2



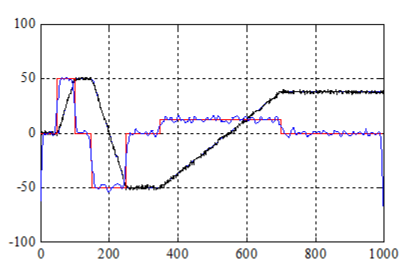
Operacja różniczkowania powinna dotyczyć ograniczonego zakresu częstotliwości (zaznaczony okręgiem)

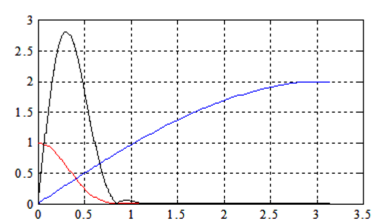
KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

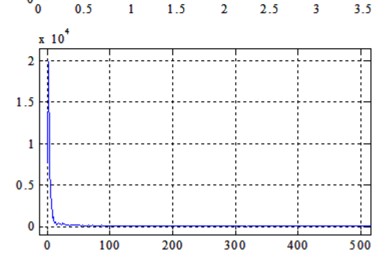
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

PROGRAM ROZWOJOWY POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

Wyznaczanie pochodnych I-go rzędu







Operacja różniczkowania powinna dotyczyć ograniczonego zakresu częstotliwości. Rozwiązanie - przeprowadzenie filtracji dolnoprzepustowej, czyli ograniczenie pasma sygnału. Wynik obliczania różnicy skończonej jest bliski przebiegowi uzyskanemu dla sygnału bez szumu.

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

PROGRAM ROZWOJOWY
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

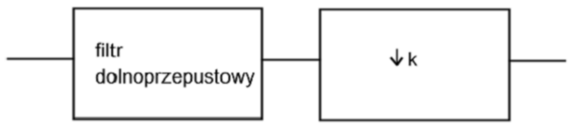
Układ obniżający częstotliwość próbkowania (decymator)

Układ decymujący - obniża częstotliwość próbkowania zadaną liczbę razy

Zastosowanie - produkt przetwarzania staje się silnie przepróbkowany (np. częstotliwość próbkowania wynosi 50x częstotliwość Nyquista). Jest tak np. przy wyznaczaniu przemieszczenia ruchomego obiektu w oparciu o zjawisko Dopplera. W efekcie musimy przechowywać nadmierną liczbę próbek – redundancja.

Uwaga – zabieg przerzedzania powinien być poprzedzony filtracją dolnoprzepustową filtrem o częstotliwości granicznej niższej niż połowa częstotliwości próbkowania po decymacji.

Decymacja kaskadowa – jeśli konieczna wysoka krotność decymacji



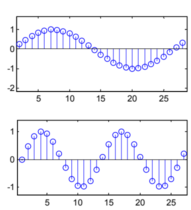
KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

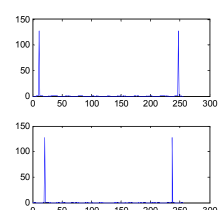
PROGRAM ROZWOJOWY
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

Układ decymujący

decymacja 2x – wybór co drugiej próbki sygnału, czyli obniżenie częstotliwości próbkowania (downsampling)



sygnał sin(2*pi*(t-1)*40/1024)



Sygnał przed (góra) i po (dół) decymacji 2x

Moduł DTF sygnału przed i po przed i po decymacji 2x. Zakres częstotliwości 0-f. próbkowania

Widoczny 2x wzrost stosunku częstotliwości sygnału do f. próbkowania, który wynika z 2x spadku f.próbkowania (skalowanie osi f w jednostkach względnych)

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Układ decymujący (decymator) 2x

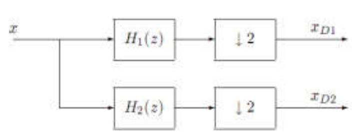
Równanie decymatora 2x $y(m) = x(2m)$

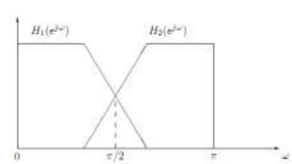
jego TF $Y(\omega) = \frac{1}{2}[X(\omega/2) + X(\pi + \omega/2)] = \frac{1}{2}[X(\omega/2) + X^*(\pi - \omega/2)]$

PROGRAM ROZWOJOWY
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

Bank filtrów do dekompozycji sygnału na podpasma

Filtr dolnoprzepustowy H1 o pasmie do $\pi/2$ oraz filtr górnoprzepustowy H2 o pasmie powyżej $\pi/2$. Pasmo sygnału ograniczone jest do π (tw. Nyquista). Po każdej filtracji następuje 2x decymacja.





$\downarrow$2 - oznacza dwukrotną decymację

(odrzucenie co drugiej próbki - 2x obniżenie fs)

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

PROGRAM ROZWOJOWY
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

Bank filtrów - dekompozycja sygnału na podpasma

TF ciągu wyjściowego decymatora:

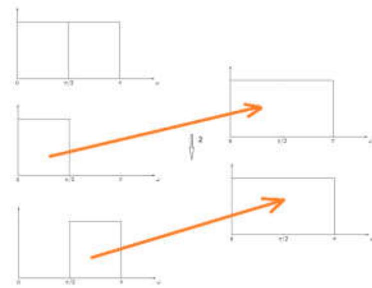
$$Y(\omega)=\frac{1}{2}[X(\omega/2)+X^*(\pi-\omega/2)]$$

Moduły TF

Moduł widma ciągu wejściowego decymatora (pasmo od 0 do π)

Podział pasma, decymacja części dolnej widma

Podział pasma, decymacja części górnej widma



$$Y(0)=\frac{1}{2}[X(0)+X^*(\pi)]=\frac{1}{2}X^*(\pi)\quad\Rightarrow\quad|Y(0)|=\frac{1}{2}|X^*(\pi)|=\frac{1}{2}|X(\pi)|$$

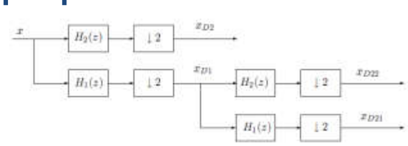
$$Y(\frac{\pi}{2})=\frac{1}{2}[X(\frac{\pi}{4})+X^*(\pi-\frac{\pi}{4})]=\frac{1}{2}[X^*(\frac{3\pi}{4})]\quad\Rightarrow\quad|Y(\pi/2)|=\frac{1}{2}|X^*(\frac{3\pi}{4})|=\frac{1}{2}|X(\frac{3\pi}{4})|$$

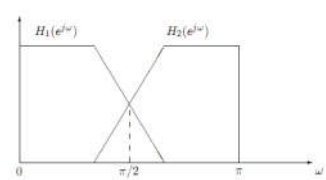
KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

PROGRAM ROZWOJOWY
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

Bank filtrów do dekompozycji sygnału na podpasma

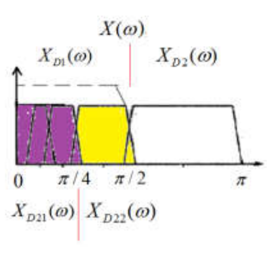




Z punktu widzenia bieżącej częstotliwości próbkowania (po decymacji) pasma sygnałów wyjściowyc filtrów x_{D1}, x_{D2}, x_{D21} i x_{D22} są identyczne: $0\le\omega<\pi$

Każdy z sygnałów wyjściowych x_D zawiera inne podpasmo sygnału x!!!

Sygnał	podpasmo x
$X_{D2}(\omega)$	$\pi/2\le\omega\le\pi$
$X_{D1}(\omega)$	$0\le\omega\le\pi/2$
$X_{D22}(\omega)$	$\pi/4\le\omega\le\pi/2$
$X_{D21}(\omega)$	$0\le\omega\le\pi/4$



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

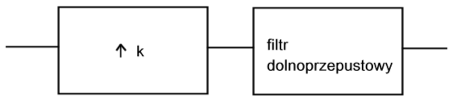
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

PROGRAM ROZWOJOWY POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

Układ interpolujący (interpolator)

Układ podnoszący częstotliwość próbkowania przez wstawienie zer między próbki istniejącego sygnału i filtrację dolnoprzepustową (najprostsza metoda).

Inne metody – aproksymacja wielomianowa, funkcje sklejane



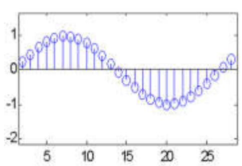
KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

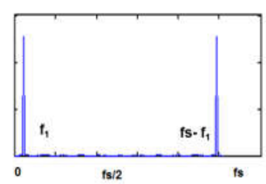
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

PROGRAM ROZWOJOWY POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

Układ interpolujący (interpolator)

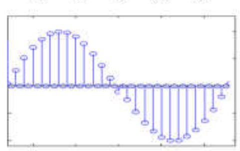
Przykład:
h=sin(2*pi*(t-1)*40/1024);
interpolacja zerami 2x

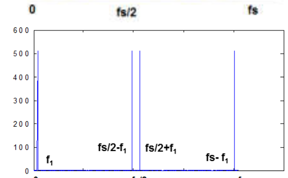




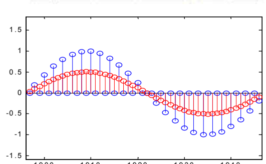
sygnał przed interpolacją
i moduł jego DFT

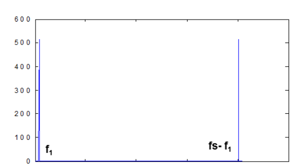
$f_1 \cong 0.1$ fs





sygnał interpolowany
i moduł jego DFT





sygnał interpolowany przed filtracją (niebieski) i po filtracji (czerwony);
moduł DFT sygnału po filtracji

Ponieważ podwojono fs, zmianie ulega relacja
f_1 i fs - $f_1 \cong 0.05$ fs

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

Układ interpolujący 2x (interpolator)

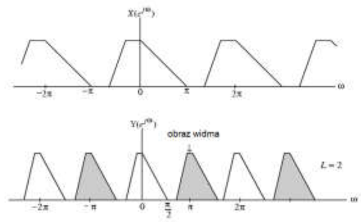
ciąg x(n) $x(k) = x(0) + x(k-1) + x(k-2) + \dots x(k-n) + \dots$

ciąg y(n) $y(k) = x(0) + 0 + x(k-2) + 0 + x(k-4) + \dots + 0 + x(k-2m) + \dots$

Przekształcenie Z ciągu y dla interpolatora 2x $Y(z) = X(0) + X(1)z^{-2} + X(2)z^{-4} + \dots + X(m)z^{-2m} = X(z^2)$

TF ciągu y dla 2x interpolacji

$$Y(\omega) = X(2\omega) = X(2\omega - 2\pi) = X^{*}(2(\pi - \omega))$$



Moduł widma sygnału po 2x interpolacji.

Zaznaczony kolorem szarym tzw. obraz widma eliminuje się drogą filtracji dolnoprzepustowej.