



PRZETWARZANIE SYGNAŁÓW

SEMESTR V

Człowiek - najlepsza inwestycja



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



*Projekt współfinansowany przez Unię Europejską
w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego*



Wykład V

Podstawowe wiadomości o filtrach

Ciągi dyskretne i układy liniowe niezmiennie względem przesunięcia



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



Podstawowe wiadomości o filtrach

Układ (system) liniowy stacjonarny

Układ liniowy stacjonarny,
sygnał wejściowy $x(t)$, sygnał
wyjściowy $y(t)$ opis -
transmitancja T :

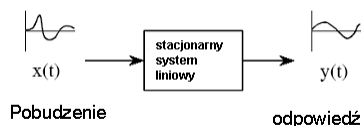
$$y(t) = T[x(t)]$$

układ liniowy

$$T[Ax_1(t) + Bx_2(t)] = AT[x_1(t)] + BT[x_2(t)]$$

układ stacjonarny

$$\text{jeśli } y(t) = T[x(t)], \text{ to } y(t-t_0) = T[x(t-t_0)]$$





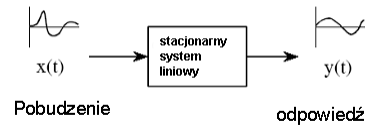
**PROGRAM ROZWOJOWY
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ**

Układ (system) liniowy stacjonarny

Układ liniowy, stacjonarny, opisany w dziedzinie czasu przez odpowiedź impulsową $h(t)$ – jego sygnał wyjściowy jest splotem sygnału wejściowego (pobudzenia) i odpowiedzi impulsowej układu:

$$y(t) = \int_0^t x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

odpowiedź impulsowa układu – odpowiedź układu na pobudzenie impulsem Diraca usytuowanym w początku układu:



$$h(t) = \int_0^t \delta(\tau)h(t-\tau)d\tau$$



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

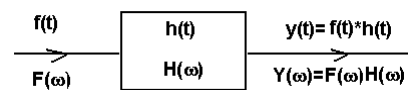


**PROGRAM ROZWOJOWY
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ**

Układ (system) liniowy stacjonarny

Opisany w dziedzinie czasu przez odpowiedź impulsową $h(t)$ i w dziedzinie częstotliwości przez funkcję przenoszenia $H(\omega)$ – zastosowanie twierdzenia o transformacji splotu funkcji

pobudzenie $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$
odpowiedź $y(t) \leftrightarrow Y(\omega)$



Opis w dziedzinie czasu

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

Opis w dziedzinie częstotliwości

$$Y(\omega) = F(\omega)H(\omega)$$



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY





PROGRAM ROZWOJOWY POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

Filtry

Filtr - układ o określonych właściwościach częstotliwościowych

Rola – kształtowanie pasma sygnału (eliminacja zakłóceń, poprawa S/N, spełnienie wymagań twierdzenia o próbkowaniu)

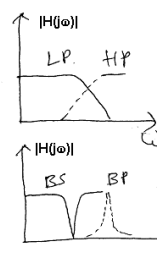
Narzędzia opisu – transformacja Laplace'a, transformacja Fouriera

Odpowiedź częstotliwościowa jest TF odpowiedzi impulsowej i wartością transmitancji $H(s)$ układu dla $s=j\omega$

Filtry

- dolnoprzepustowe LP
- górnoprzepustowe HP
- pasmowoprzepustowe BP
- pasmowozaporowe BS
- wszechprzepustowe

$$H(j\omega) = H(s) \Big|_{s=j\omega}$$



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



PROGRAM ROZWOJOWY POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

Opis i parametry filtru

- odpowiedź częstotliwościowa

$$H(j\omega) = H(s) \Big|_{s=j\omega} = \frac{H_0}{-\omega^2 + \frac{\omega_0}{Q}j\omega + \omega_0^2}$$

- charakterystyka amplitudowa (moduł odpowiedzi częstotliwościowej) $|H(j\omega)|$
częstotliwość graniczna, środkowa, pasmo)

- charakterystyka fazowa

$$\phi = \arg(H(j\omega))$$

- opóźnienie fazowe t_p

$$t_p = -\frac{\phi}{\omega}$$

- opóźnienie grupowe t_g

$$t_g = -\frac{d\phi}{d\omega}$$

- dobroć/współczynnik tłumienia ($Q=1/2\xi$)

- inne (rzęd filtru, nachylenie modułu charakterystyki częstotliwościowej, odpowiedź skokowa, wzmacnienie)



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

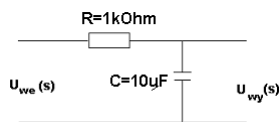




PROGRAM ROZWOJOWY
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

Przykład

Filtr dolnoprzepustowy rzędu 1



transmitancja

$$H(s) = \frac{1}{R + \frac{1}{sC}} = \frac{1}{s + \frac{1}{RC}} = \frac{\omega_0}{s + \omega_0} = \frac{100}{s + 100}$$

odpowiedź

częstotliwościowa

$$H(j\omega) = \frac{\omega_0}{j\omega + \omega_0} = \frac{100}{j\omega + 100}$$

moduł odpowiedzi

(ch-ka
amplitudowa)

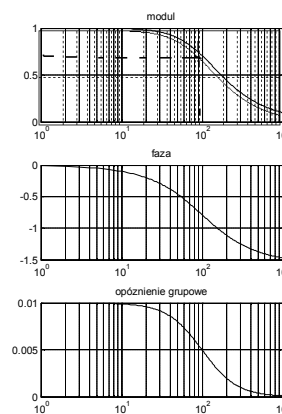
$$|H(j\omega)| = \frac{\omega_0}{|j\omega + \omega_0|} = \frac{\omega_0}{\sqrt{\omega^2 + \omega_0^2}} = \frac{100}{\sqrt{\omega^2 + 100^2}}$$

Charakterystyka
fazowa

$$\arg(H(j\omega)) = -\arctg\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$$

opóźnienie
grupowe

$$t_g = -\frac{d(\arctg(\frac{\omega}{\omega_0}))}{d\omega} = \frac{\omega_0}{1 + (\frac{\omega}{\omega_0})^2}$$



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



PROGRAM ROZWOJOWY
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

Ciągi dyskretne i układy liniowe niezmiennie względem przesunięcia



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY





PROGRAM ROZWOJOWY
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

Ciągi dyskretne

Ciągi dyskretne (ciągi próbek sygnałów, wyniki symulacji)

notacja: $x(n)$ $x[n]$ x_n $x\{n\}, n \in \mathbb{N}$

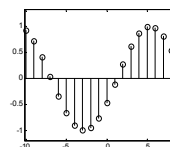
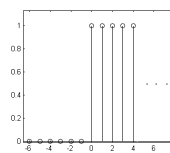
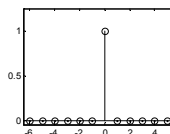
ciąg impulsowy $\delta(n)$:
n (delta Kroneckera)
pozostałych

$\delta(n)=1$ dla $n=0$ i 0 dla

ciąg skokowy $u(n)$: $u(n)=1$ dla $n \geq 0$ i 0 dla
pozostałych

czyli $\delta(n)=u(n)-u(n-1)$

ciąg sinusoidalny $x(n)=\text{asin}(\omega n + \varphi)$



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



PROGRAM ROZWOJOWY
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

Ciągi dyskretne

operacje na ciągach dyskretnych:

- iloczyn i suma, mnożenie przez stałą
- opóźnienie (przesunięcie)
- splot

ciąg przyczynowy – wartości niezerowe dla $n \geq 0$

splot dwóch ciągów $z(n)=x(n)*y(n)$

$$z(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)y(n-k) = \sum_{k=k_0}^{k_1} x(k)y(n-k)$$

Dowolny ciąg dyskretny można przedstawić jako sumę poprzesuwanych i pomnożonych przez odpowiednie stałe ciągów impulsowych:

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \delta(n-k)$$



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



**PROGRAM ROZWOJOWY
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ**

Ciągi dyskretne

Przykład obliczania splotu:

$x(n)=u(n)-n(n-N)$ oraz $h(n)=a^n, a<1, n \geq 0$

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k) = \sum_{k=k_0}^{k_1} x(k)h(n-k)$$

$$y(0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(-k) \quad y(1) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(1-k) \quad y(2) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(2-k)$$

dla $0 \leq n < N$ $y(n) = \sum_{k=0}^n a^{n-k} = a^n \frac{1-a^{-(n+1)}}{1-a^{-1}}$

dla $n \geq N$ $y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} a^{n-k} = a^n \frac{1-a^{-N}}{1-a^{-1}}$

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

**PROGRAM ROZWOJOWY
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ**

Układy liniowe stacjonarne

Układ liniowy analogowy, stacjonarny - sygnał wyjściowy jest splotem pobudzenia i odpowiedzi impulsowej układu:

$$y(t) = \int_0^t x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

Odpowiednikiem dyskretnym takiego układu jest dyskretny (cyfrowy) układ liniowy o stałych współczynnikach, niezmienny względem przesunięcia, jego sygnałem wejściowym i wyjściowym są ciągi dyskretne (dalej – układ LNP).

Opis - transmitancja T:

$$y(n)=T[x(n)]$$

układ liniowy $T[Ax_1(n) + Bx_2(n)]=AT[x_1(n)] + BT[x_2(n)]$

niezmienny względem przesunięcia $y(n)=T[x(n)]$, to $y(n-n_0)=T[x(n-n_0)]$

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

**PROGRAM ROZWOJOWY
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ**

Układy LNP

analogicznie jak w przypadku układów analogowych sygnał wyjściowy $y(n)$ jest splotem (dyskretnym) sygnału wejściowego $x(n)$ i odpowiedzi impulsowej układu $h(n)$:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k)$$

układ stabilny $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| < \infty$

układ nazywamy przyczynowym, jeśli dla $k < 0$ $h(k) = 0$

UWAGA: algorytm cyfrowego przetwarzania sygnałów (obrazów) odpowiada pewnemu układowi LNP !!!!

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

**PROGRAM ROZWOJOWY
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ**

Łączenie układów LNP

połączenie kaskadowe (łańcuchowe) układów o odpowiedziach impulsowych $h_1(n)$ i $h_2(n)$

$$h(n) = h_1(n) * h_2(n) = h_2(n) * h_1(n)$$

połączenie równoległe

$$h(n) = h_1(n) + h_2(n)$$

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY



**PROGRAM ROZWOJOWY
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ**

Transformacja Z

Odpowiednik transformacji Laplace'a dla układów analogowych (z czasem ciągłym)

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} \quad z=re^{j\omega} \quad X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)r^{-n}e^{-jn\omega}$$

notacja $Z[x(n)]=X(z)$

warunek istnienia TZ - bezwzględna sumowalność ciągu $|x(n)|r^{-n}$:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|r^{-n} < \infty$$

gdy $r=1$, czyli $z=e^{j\omega}$ (na tzw. okręgu jednostkowym - odpowiednik osi $j\omega$ w transformacji Laplace'a) – dyskretna transformacja Fouriera DTF

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-jn\omega}$$



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI



UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



**PROGRAM ROZWOJOWY
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ**

Transformacja Z

Właściwości TZ:

- liniowość $Z[Ax(n) + By(n)] = AX(z) + BY(z)$
- przesunięcie ciągu $Z[x(n + n_0)] = z^{n_0}X(z)$
- spłot ciągów $Z[x(n)*y(n)] = X(z)Y(z)$
- mnożenie przez ciąg wykładniczy $Z[a^n x(n)] = X(a^{-1}z)$



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI



UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

**PROGRAM ROZWOJOWY
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ**

Transformacja Z - przykłady

Ciąg $x(n)=u(n)$ – ciąg skokowy $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u(n)z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-z^{-n}}{1-z^{-1}} = \frac{1}{1-z^{-1}}$

szereg jest zbieżny dla $|z^{-1}| < 1$, czyli $|z| > 1$ - obszar istnienia TZ - poza okręgiem jednostkowym na płaszczyźnie Z

przyczynowy ciąg wykładniczy $x(n)=a^n u(n)$, $a < 1$

Transformata Z ciągu: $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-(az^{-1})^{n+1}}{1-az^{-1}} = \frac{1}{1-az^{-1}}$

Granica tego ciągu istnieje (szereg jest zbieżny) dla $|az^{-1}| < 1$, czyli $|z| > a$

Natomiast ciąg $x(n)=a^n u(-n)$ o wyrazach niezerowych dla $n < 0$, jest zbieżny dla $|z| < a$;

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

**PROGRAM ROZWOJOWY
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ**

Transformacja Z

Równanie opisujące działanie układu LNP: $y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k) = x(n) * h(n)$

to transformata Z takiego równania (czyli równanie opisujące działanie układu w dziedzinie z) ma postać:

$$Y(z) = X(z)H(z)$$

gdzie:

- $X(z)$ - TZ ciągu wejściowego (pobudzenia)
- $Y(z)$ - TZ ciągu wyjściowego (odpowiedzi)
- $H(z)$ - TZ odpowiedzi impulsowej układu

Na okręgu jednostkowym obowiązuje:

$$Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})X(e^{j\omega})$$

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



PROGRAM ROZWOJOWY
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

Reprezentacja częstotliwościowa ciągów dyskretnych

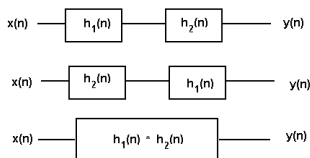
ciąg wykładniczy $x(n)=\exp(j\omega n)$

odpowiedź układu LNP na taki sygnał jest następująca:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) \exp(j\omega(n-k)) = \exp(j\omega n) \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) \exp(-j\omega k) = \exp(j\omega n) H(e^{j\omega})$$

przy czym
$$H(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) \exp(-j\omega k)$$

Wyrażenie to jest TF ciągu $h(n)$, nazywamy je charakterystyką częstotliwościową układu o odpowiedzi impulsowej $h(n)$. Jest to zarazem TZ odpowiedzi impulsowej tego układu wyznaczona na okręgu jednostkowym ($z=e^{j\omega}$).



Odpowiedź częstotliwościowa połączenia kaskadowego układów LNP jest iloczynem odpowiedzi częstotliwościowych poszczególnych członów

$$h(n) = h_1(n) * h_2(n) \leftrightarrow H(e^{j\omega}) = H_1(e^{j\omega}) H_2(e^{j\omega})$$



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



PROGRAM ROZWOJOWY
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

Reprezentacja częstotliwościowa ciągów dyskretnych

TF ciągu $h(n)$ - charakterystyka częstotliwościowa układu o odpowiedzi impulsowej $h(n)$:

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) \exp(-j\omega k)$$

Zapis:
$$H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})| e^{j \arg(H(e^{j\omega}))}$$

$|H(e^{j\omega})|$ - moduł charakterystyki częstotliwościowej (ch-ka amplitudowa)

$\arg(H(e^{j\omega}))$ - faza charakterystyki częstotliwościowej (ch-ka fazowa)

Opóźnienie grupowe wprowadzane przez układ:
$$\tau(e^{j\omega}) = -\frac{d(\arg(H(e^{j\omega})))}{d\omega}$$

Parametry - okresowe z okresem 2π !!!!



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY





PROGRAM ROZWOJOWY
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

Równania różnicowe o stałych współczynnikach

Opis przyczynowych układów LNP – równania różnicowe jak obok, które wiążą ze sobą zbiory próbek wejściowych $x(n-r)$ i wyjściowych $y(n-k)$ z użyciem odpowiednich współczynników, właściwych dla danego układu

$$\sum_{k=0}^N a_k y(n-k) = \sum_{r=0}^M b_r x(n-r)$$

$$y(n) = -\sum_{k=1}^N \frac{a_k}{a_0} y(n-k) + \sum_{r=0}^M \frac{b_r}{a_0} x(n-r)$$

Powyższa postać określa wartość bieżącej próbki ciągu wyjściowego układu LNP

Jeśli dla $k > 0$ $a_k = 0$, mamy do czynienia z tzw. układem o skończonej odpowiedzi impulsowej SOI (albo FIR - Finite Impulse Response). Równanie różnicowe przyjmuje postać:

$$y(n) = \sum_{r=0}^M \frac{b_r}{a_0} x(n-r) = \sum_{r=0}^M h(r) x(n-r) = h(n) * x(n)$$

współczynniki odpowiedzi impulsowej układu są równe $h(n) = b_n / a_0$.

Jeśli dla $k > 0$ $a_k \neq 0$ – układ o nieskończonej odpowiedzi impulsowej NOI (albo IIR Infinite Impulse Response). Odpowiedź impulsowa nie jest określona w jawny sposób.



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



PROGRAM ROZWOJOWY
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

Równania różnicowe o stałych współczynnikach

Do równania różnicowego opisującego układ LNP możemy zastosować TZ:

$$\sum_{k=0}^N a_k y(n-k) = \sum_{r=0}^M b_r x(n-r)$$

$$Z[x(n+n_0)] = z^{n_0} X(z)$$

$$\sum_{k=0}^N a_k Y(z) z^{-k} = \sum_{r=0}^M b_r X(z) z^{-r}$$

i dalej

$$Y(z) \sum_{k=0}^N a_k z^{-k} = X(z) \sum_{r=0}^M b_r z^{-r}$$

i otrzymać wyrażenie przedstawiające funkcję przenoszenia układu – jego transmitancję (transformatę Z odpowiedzi impulsowej układu):

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{r=0}^M b_r z^{-r}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}}$$



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY





PROGRAM ROZWOJOWY
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

Transformacja Z równania różnicowego

transmitancja układu LNP (transformata Z odpowiedzi impulsowej):

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{r=0}^M b_r z^{-r}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}}$$

Dla $z=e^{j\omega}$ otrzymamy TF odpowiedzi impulsowej układu (filtru), czyli jego odpowiedź częstotliwościową:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{\sum_{r=0}^M b_r e^{-j\omega r}}{\sum_{k=0}^N a_k e^{-j\omega k}} \quad H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})| e^{j \arg(H(e^{j\omega}))}$$



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



PROGRAM ROZWOJOWY
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

Przykłady układów SOI i NOI

Układ o odpowiedzi impulsowej:

$h(n)=1$ dla $0 \leq n \leq N-1$, 0 dla pozostałych - układ SOI



odpowiedź częstotliwościowa:

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) \exp(-j\omega k) = \sum_{k=0}^{N-1} \exp(-j\omega k) = \frac{1 - e^{-j\omega N}}{1 - e^{-j\omega}} = \frac{e^{-j\omega N/2} (e^{j\omega N/2} - e^{-j\omega N/2})}{e^{-j\omega/2} (e^{j\omega/2} - e^{-j\omega/2})} = \frac{\sin(\omega N/2)}{\sin(\omega/2)} e^{-j(N-1)\omega/2}$$

moduł $|H(e^{j\omega})| = \frac{\sin(\omega N/2)}{\sin(\omega/2)}$

faza $\arg(H(e^{j\omega})) = -(N-1)\omega/2$

opóźnienie $\tau(e^{j\omega}) = (N-1)/2$

równanie różnicowe $y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) h(n-k) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k)$



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY





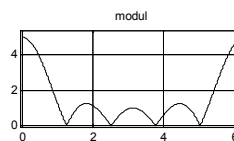
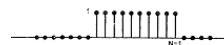
**PROGRAM ROZWOJOWY
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ**

Przykłady układów SOI i NOI

Układ SOI
 $h(n)=1$ dla $0 \leq n \leq N-1$, 0 dla pozostałych

moduł $|H(e^{j\omega})| = \left| \frac{\sin(\omega N / 2)}{\sin(\omega / 2)} \right|$

faza $\arg(H(e^{j\omega})) = -(N-1)\omega / 2$



Interpretacja: jest to układ, na którego wyjściu pojawia się suma N poprzednich próbek sygnału – układ uśrednia, a więc eliminuje wyższe składowe częstotliwościowe – stąd charakterystyka dolnoprzepustowa

Uwaga: parametry opisujące filtr (moduł, faza, opóźnienia) są okresowe z okresem 2π !!!!



**PROGRAM ROZWOJOWY
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ**

Przykłady układów SOI i NOI

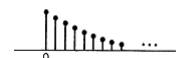
$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{r=0}^M b_r z^{-r}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}}$$

Układ opisany równaniem różnicowym $y(n)=a y(n-1) + x(n)$
 jest to układ NOI

$$Z[x(n + n_0)] = z^{n_0} X(z)$$

Transmitancja układu $H(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z - a}$

Przy założeniu przyczynowości odpowiedź impulsowa ma postać $h(n)=a^n u(n)$



Charakterystyka częstotliwościowa układu $H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}} = \frac{e^{j\omega}}{e^{j\omega} - a}$
 (okrąg jednostkowy – $z=e^{j\omega}$) – okresowa z okresem 2π !!!





**PROGRAM ROZWOJOWY
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ**

Przykłady układów SOI i NOI

Układ NOI opisany równaniem różnicowym $y(n)=a y(n-1) + x(n)$

Charakterystyka częstotliwościowa układu

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}} = \frac{e^{j\omega}}{e^{j\omega} - a}$$

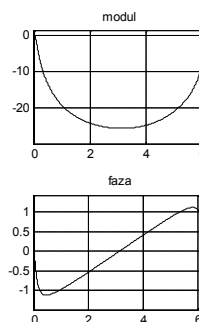
moduł

$$|H(e^{j\omega})| = \frac{1}{\sqrt{(\cos \omega - a)^2 + \sin^2 \omega}} = \frac{1}{\sqrt{1 + a^2 - 2a \cos \omega}}$$

faza

dla $a=0.9$

$$\arg(H(e^{j\omega})) = \omega - \arctg \frac{\sin \omega}{\cos \omega - a}$$



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



**PROGRAM ROZWOJOWY
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ**

Układy SOI o liniowej charakterystyce fazowej

Filtry przyczynowe

Liniowa charakterystyka filtrów SOI – gdy odpowiedź impulsowa jest symetryczna

$$h(n)=h(N-1-n)$$

równanie różnicowe

$$y(n)=0.25x(n)+0.5x(n-1)+x(n-2)+0.5x(n-3)+0.25x(n-4)$$

transmitancja

$$H(z)=0.25 + 0.5z^{-1} + z^{-2} + 0.5z^{-3} + 0.25z^{-4}$$

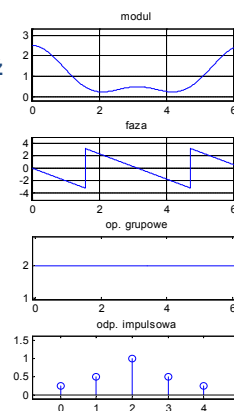
Odpowiedź częstotliwościowa

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= 0.25 + 0.5 e^{-j\omega} + e^{-j2\omega} + 0.5 e^{-j3\omega} + 0.25 e^{-j4\omega} \\ &= e^{-j2\omega} [0.25 e^{j2\omega} + 0.5 e^{j\omega} + 1 + 0.5 e^{-j\omega} + 0.25 e^{-j2\omega}] \\ &= e^{-j2\omega} [0.5 \cos 2\omega + \cos \omega + 1] \end{aligned}$$

Moduł odpowiedzi $|H(e^{j\omega})| = |0.5 \cos 2\omega + \cos \omega + 1|$

faza $\arg(H) = -2\omega$!! liniowa!!!

opóźnienie grupowe 2 (próbki) stałe!!



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



**PROGRAM ROZWOJOWY
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ**

Porównanie właściwości układów SOI i NOI

Istotną właściwością układów SOI – mogą posiadać liniową charakterystykę fazową. Zaletą tą jest uzyskana za cenę gorszych właściwości charakterystyki amplitudowej w porównaniu z układami NOI, które przy tym samym rzędzie zapewnią znacznie większe tłumienie w pasmie zaporowym. Układy NOI mogą posiadać nieliniowe charakterystyki fazowe.

filtr SOI – rząd 10, $f_g=0.2f_s$ filtr NOI – rząd 10, $f_g=0.2f_s$

moduł

faza

opóźnienie grupowe

NOI $y(n) = -\sum_{k=1}^N a_k y(n-k) + \sum_{r=0}^M \frac{b_r}{a_0} x(n-r)$

SOI $y(n) = \sum_{r=0}^M \frac{b_r}{a_0} x(n-r) = \sum_{r=0}^M h(r)x(n-r) = h(n) * x(n)$

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

**PROGRAM ROZWOJOWY
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ**

Porównanie właściwości układów SOI i NOI

Skutki transmisji złożonych sygnałów przez układy o różnych cechach opóźnienia grupowego

Sygnał złożony z dwóch składowych:
 $x = \sin(2\pi t * 150) + \sin(2\pi t * 50)$;

Filtry NOI i SOI tego samego rzędu 30

Moduł SOI (czerwony) i NOI

czarny - przed f, nieb - SOI, czerw - NOI

Zniekształcenia przebiegu przez filtr NOI

Widmo sygnału przed filtracją

po filtrze SOI

po filtrze NOI

TF przed filtracją

TF po filtracji SOI

TF po filtracji NOI

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY



PROGRAM ROZWOJOWY
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

Metody projektowania filtrów cyfrowych

Filtr – algorytm przetwarzania opisany równaniem różnicowym, wykorzystywany w dziedzinie czasu (dyskretnego). Wymagania określone są najczęściej w dziedzinie częstotliwości poprzez określenie parametrów takich jak pasmo przepustowe, pasmo przejściowe, granica pasma zaporowego, minimalne tłumienie w pasmie zaporowym. Na podstawie tych założeń należy wyznaczyć wartości współczynników filtru, czyli współczynników równania różnicowego.

Istnieją dwie grupy metod projektowania filtrów cyfrowych:

- Metody wykorzystujące znane prototypy filtrów analogowych (NOI)
- Metody bezpośrednie - aproksymacja poszukiwanej charakterystyki (NOI, SOI)



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI



UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



PROGRAM ROZWOJOWY
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

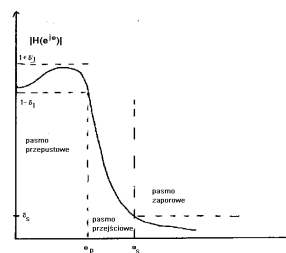
Metody projektowania filtrów cyfrowych

Założenia projektowe

- częstotliwość graniczna pasma przepustowego
- rodzaj charakterystyki
- częstotliwość graniczna pasma zaporowego
- minimalne tłumienie w pasmie zaporowym

Pozwala to zapisać dwa warunki na $|H(e^{j\omega})|$:

$$20 \lg |H(e^{j\omega_p})| = \delta_1 \quad 20 \lg |H(e^{j\omega_s})| = \delta_2$$



Na podstawie tych warunków wyznacza się rząd filtru, a następnie współczynniki filtru – procedury projektowe np. w środowisku Matlab.



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI



UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



**PROGRAM ROZWOJOWY
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ**

Projektowanie filtrów NOI

Metody wykorzystujące teorię analogowych układów liniowych

Metoda transformacji biliniowej

Znana jest transmitancja filtru analogowego $H_a(s)$

Dokonując podstawienia:

$$s = \frac{2}{T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$$

uzyskujemy transmitancję $H(z)$ odpowiadającego mu filtru dyskretnego. W celu uzyskania charakterystyki częstotliwościowej filtru dyskretnego podstawienie ma postać:

$$s = \frac{2}{T} \frac{1 - e^{-j\omega}}{1 + e^{-j\omega}}$$

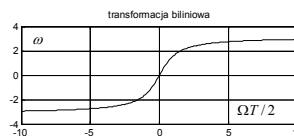
$$s = \sigma + j\Omega$$

Ω - pulsacja „analogowa”

ω - pulsacja „dyskretna”

Związek między obiema pulsacjami nie jest liniowy!

$$\omega = 2 \arctg(\Omega T / 2)$$



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



**PROGRAM ROZWOJOWY
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ**

Projektowanie filtrów NOI

Metody bezpośrednie – zadanie charakterystyki, optymalizacja parametrów równania

Minimalizacja błędu średniokwadratowego w dziedzinie częstotliwości: definiuje się przebieg charakterystyki amplitudowej filtru $|H_d(e^{j\omega})|$ dla zbioru M pulsacji $\{\omega_i\}$, a następnie dobiera współczynniki przedstawionej w następujący sposób charakterystyki filtru:

$$H(z) = A \prod_{k=1}^K \frac{1 + a_k z^{-1} + b_k z^{-2}}{1 + c_k z^{-1} + d_k z^{-2}}$$

by zminimalizować błąd średniokwadratowy:

$$E = \sum_{i=1}^M [|H(e^{j\omega_i})| - |H_d(e^{j\omega_i})|]^2$$

minimalizacja \rightarrow parametry a_k, b_k, c_k, d_k .



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



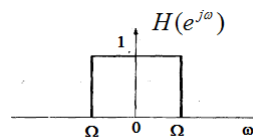


PROGRAM ROZWOJOWY
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

Projektowanie filtrów SOI

Obcięcie odpowiedzi filtru NOI i zastosowanie okna

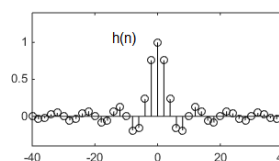
H – założona charakterystyka częstotliwościowa (np. idealny filtr dolnoprzepustowy - NOI – nie jest przyczynowy!!)



$h(n)$ – odpowiedź impulsowa filtru NOI

$$h(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega}) \exp(j\omega n) d\omega$$

Odpowiedź tego filtru jest nieograniczona, przyjmuje wartości niezerowe dla $n < 0$; aby filtr był realizowalny – musi być przyczynowy (niezerowe wartości h tylko dla $n \geq 0$), aby był to filtr SOI – należy zbiór niezerowych wartości h ograniczyć;



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



PROGRAM ROZWOJOWY
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

Projektowanie filtrów SOI

Obcięcie odpowiedzi filtru NOI i zastosowanie okna

Odpowiedź tego filtru jest nieograniczona, przyjmuje wartości niezerowe dla $n < 0$; aby filtr był realizowalny – musi być przyczynowy (niezerowe wartości h tylko dla $n \geq 0$), aby był to filtr SOI – należy zbiór niezerowych wartości h ograniczyć do pewnego N ;

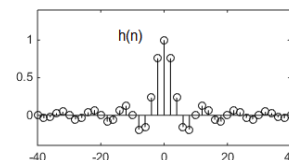
Należy przesunąć odpowiedź $h(n)$ o $(N-1)/2$ próbek:

$$h(n - (N-1)/2)$$

a następnie ograniczyć jej długość do N próbek – czyli pomnożyć przez okno $w(n)$ przyjmujące niezerowe wartości dla $n=0, 1, \dots, N-1$:

$$h_1(n) = w(n) h(n - (N-1)/2) \quad w(n) \neq 0 \text{ dla } n=0, 1, \dots, N-1$$

Operacje te można wykonać w odwrotnej kolejności, tj. zastosować symetryczne okno $w(n)$, a następnie przesunąć wynik mnożenia o $(N-1)/2$ próbek



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY





PROGRAM ROZWOJOWY
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

Projektowanie filtrów SOI

Odpowiedź $h(n)$ jest nieskończona i układ nie jest przyczynowy – należy przesunąć $h(n)$ o $(N-1)/2$ próbek oraz ograniczyć czas trwania $h(n)$ (okno). Wynikające z tych operacji transmitancje mają następujące postaci:

przesunięcie o $(N-1)/2$
$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n - \frac{N-1}{2})z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)z^{-\frac{N-1}{2}}z^{-n} = z^{-\frac{N-1}{2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)z^{-n}$$

ograniczenie do N próbek

$$h_1(n) = h(n - (N-1)/2)w(n) \quad w(n) \neq 0 \text{ dla } n \in [0, N-1] \text{ i } 0 \text{ poza}$$

$$H_1(z) = z^{-\frac{N-1}{2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)w(n)z^{-n} = z^{-\frac{N-1}{2}} \sum_{n=0}^{N-1} h(n)w(n)z^{-n} = z^{-\frac{N-1}{2}} H(z) * W(z)$$

$$H_1(e^{j\omega}) = e^{j\omega \frac{N-1}{2}} H(e^{j\omega}) * W(e^{j\omega})$$



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



PROGRAM ROZWOJOWY
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

Projektowanie filtrów SOI

Obcięcie odpowiedzi filtru NOI i zastosowanie okna

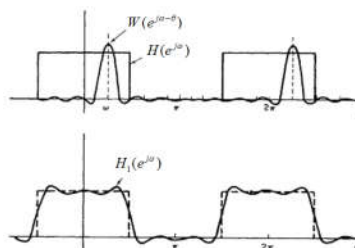
H – założona charakterystyka częstotliwościowa

H_1 – splot charakterystyki H z transformatą okna ograniczającego.

W – transformata Fouriera okna ograniczającego

$$H_1(e^{j\omega}) = e^{j\omega \frac{N-1}{2}} H(e^{j\omega}) * W(e^{j\omega})$$

$$H_1(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} e^{j\omega \frac{N-1}{2}} \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\theta}) W(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta$$



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY





**PROGRAM ROZWOJOWY
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ**

Zastosowanie okien do obciętej odpowiedzi impulsowej filtru

- okno prostokątne

- okno Bartletta

$$w(n)=2n/(N-1), \quad n=0,1,\dots,(N-1)/2$$

$$w(n)=2-2n/(N-1), \quad n=(N-1)/2,\dots,N-1$$

- okno Hanna

$$w(n)=0.5(1-\cos(2\pi n/(N-1))), \quad n=0,1,\dots,N-1$$

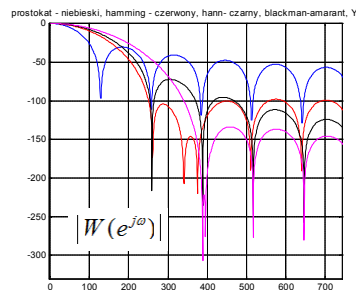
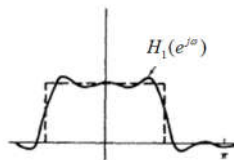
- okno Hamminga

$$w(n)=0.54-0.46\cos(2\pi n/(N-1)), \quad n=0,1,\dots,N-1$$

-okno Blackmana

$$w(n)=0.42+0.5\cos(2\pi n/(N-1))+0.08\cos(4\pi n/(N-1)), \quad n=0,1,\dots,N-1$$

Zależnie od zastosowanego okna uzyskamy różny poziom listków bocznych i różną szerokość pasma przejściowego



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

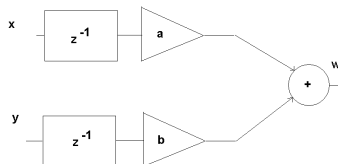


**PROGRAM ROZWOJOWY
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ**

Realizacje układów dyskretnych (filtrów cyfrowych)

Jak wynika z postaci równania różnicowego, układy liniowe dyskretne niezmiennie względem przesunięcia można przedstawić w postaci schematów (grafów), posługując się elementami takimi jak blok opóźniający o 1 próbkę, węzeł sumacyjny i mnożenie przez stałą:

$$y(n) = -\sum_{k=1}^N a_k y(n-k) + \sum_{r=0}^M b_r x(n-r)$$



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



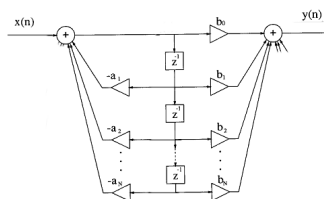
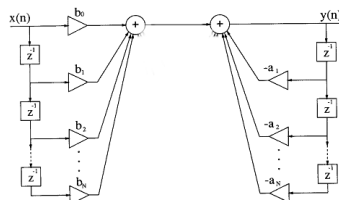
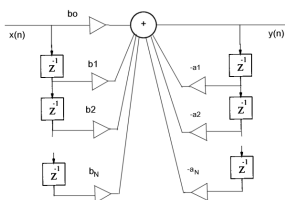


**PROGRAM ROZWOJOWY
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ**

Realizacje filtrów cyfrowych

NOI realizacja bezpośrednia (M=N)

$$y(n) = -\sum_{k=1}^N a_k y(n-k) + \sum_{r=0}^M b_r x(n-r)$$



Filtr można traktować jako kaskadowe połączenie dwóch układów liniowych niezmiennych względem przesunięcia – można zamienić ich kolejność. Prowadzi to do tzw. kanonicznej postaci filtru:



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



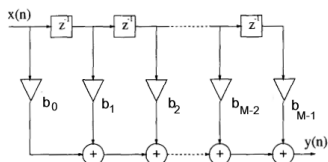
**PROGRAM ROZWOJOWY
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ**

Realizacje filtrów cyfrowych

SOI

Realizacja bezpośrednia – wynika z równania

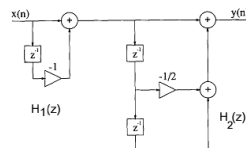
$$y(n) = \sum_{r=0}^M b_r x(n-r)$$



$$H(z) = \prod_{i=1}^L H_i(z)$$

Realizacja kaskadowa – wynik dekompozycji transmitancji na iloczyn składników drugiego i ew. pierwszego rzędu:

np. $H(z) = (1-z^{-1})(1-0.5z^{-1}+z^{-2}) = H_1(z)H_2(z)$



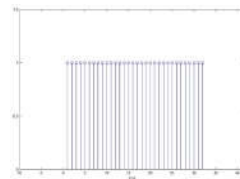
KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



TF dyskretnego okna prostokątnego I

$$w_R(n) = \begin{cases} 1, & n = 0, 1, 2, \dots, N-1 \\ 0, & \text{pozostałe } n \end{cases}$$



DTF $X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}$

$$W_R(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} w_R(n)e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{N-1} w_R(n)e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j\omega n}$$

gdzie $\omega = 2\pi k/N \Leftrightarrow 2\pi(f/f_p)$

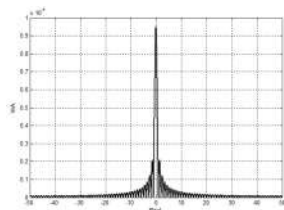
DTF – suma skończonego szeregu geometrycznego:

$$W_R(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{N-1} (e^{-j\omega})^n = \frac{1 - (e^{-j\omega})^N}{1 - e^{-j\omega}}$$

TF dyskretnego okna prostokątnego II

Z powyższych równań wynika:

$$\begin{aligned} W_R(e^{j\omega}) &= \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{N-1} (e^{-j\omega})^n = \frac{1 - (e^{-j\omega})^N}{1 - e^{-j\omega}} = \\ &= \frac{(e^{-j\omega})^{N/2} (e^{j\omega})^{N/2} - (e^{-j\omega})^{N/2}}{e^{-j\omega/2} (e^{j\omega/2} - e^{-j\omega/2})} = \frac{(e^{-j\omega})^{N/2} 2j \sin(N\omega/2)}{e^{-j\omega/2} 2j \sin(\omega/2)} = (e^{-j\omega})^{(N-1)/2} \frac{\sin(N\omega/2)}{\sin(\omega/2)} \end{aligned}$$



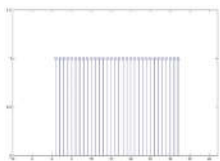
widmo amplitudowe dyskretnego okna prostokątnego (okresowe!!!!)

skala liniowa

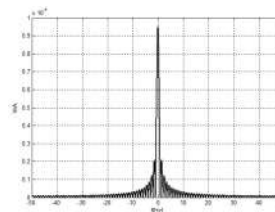
$$W_R(e^{j\omega}) = e^{-j\omega(N-1)/2} \frac{\sin(N\omega/2)}{\sin(\omega/2)}$$

$$W_R(e^{j\omega}) = e^{-j\omega(N-1)/2} \frac{\sin(N\omega/2)}{\sin(\omega/2)}$$

TF dyskretnego okna prostokątnego III

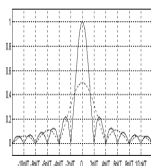


widmo amplitudowe
dyskretnego okna
prostokątnego
(okresowe!!!!)



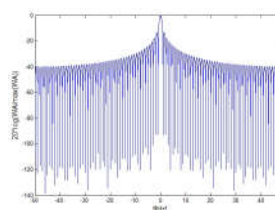
skala liniowa

dyskretne okno prostokątne



skala logarytmiczna

$$F(\omega) = AT \sin c\left(\frac{\omega T}{2}\right)$$



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

TF okna prostokątnego czasu ciągłego

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



Wybrane układy dyskretne



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY





PROGRAM ROZWOJOWY
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

Układ różnicy skończonej I-go rzędu

Aproksymacja pochodnej - skończona różnica pierwszego rzędu:

$$y(n)=x(n)-x(n-1) \quad \text{współczynniki odpowiedzi impulsowej } 1, -1$$

Transformata Z

$$Y(z)=X(z)-X(z)z^{-1}$$

$$H(z)=1-z^{-1}$$

Charakterystyka częstotliwościowa

$$H(e^{j\omega})=1-e^{-j\omega}=1-\cos\omega+j\sin\omega=e^{-j\omega/2}(e^{j\omega/2}-e^{-j\omega/2})=e^{-j\omega/2}(j2\sin(\omega/2))=e^{-j(\omega/2+\pi/2)}2\sin(\omega/2)$$

Moduł

$$|H(e^{j\omega})|=[(1-\cos\omega)^2+\sin^2\omega]^{1/2}=[1-2\cos\omega+\cos^2\omega+\sin^2\omega]^{1/2}=[2-2\cos\omega]^{1/2}=2\sin(\omega/2)$$

Faza

$$\arg(H(e^{j\omega}))=\arctg(\sin\omega/(1-\cos\omega))=\arctg(\ctg(\omega/2))=\arctg(\tg(\pi/2-\omega/2))=\pi/2-\omega/2$$



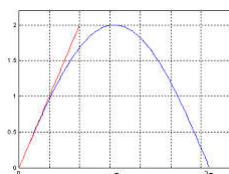
KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

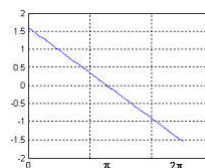


PROGRAM ROZWOJOWY
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

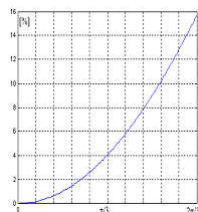
Układ różnicy skończonej I-go rzędu



Moduły charakterystyk częstotliwościowych układu różnicy skończonej pierwszego rzędu oraz idealnego układu różniczkującego (linia prosta o nachyleniu f). Zakres $0-f_s$



Faza charakterystyki częstotliwościowej układu różnicy skończonej pierwszego rzędu. Zakres $0-f_s$



Różnica między modułami charakterystyk częstotliwościowych układu różnicy skończonej pierwszego rzędu oraz idealnego układu różniczkującego. Zakres $0-f_s/3$



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



**PROGRAM ROZWOJOWY
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ**

Wyznaczanie pochodnych I-go rzędu

Przebieg trapezowy i jego pochodna

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

**PROGRAM ROZWOJOWY
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ**

Wyznaczanie pochodnych I-go rzędu

Przebieg trapezowy z szumem i jego pochodna (poniżej); powyżej – oczekiwany wynik różniczkowania (wykres czerwony).

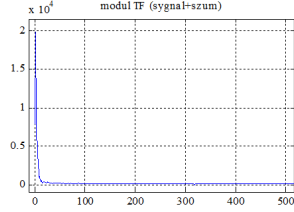
Moduły charakterystyk częstotliwościowych układu różnicy skończonej pierwszego rzędu oraz idealnego układu różniczkującego. Zakres 0-fs

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

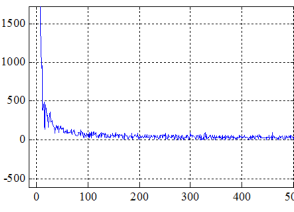
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

**PROGRAM ROZWOJOWY
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ**

Wyznaczanie pochodnych I-go rzędu

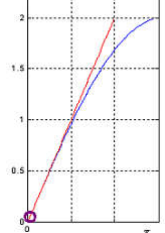


modul TF (sygnał+szum)




modul TF (sygnał+szum)


Transformata Fouriera przebiegu trapezowego



Transformata Fouriera przebiegu trapezowego z szumem. Zakres 0-fs/2

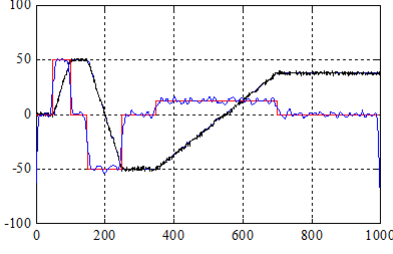
Operacja różniczkowania powinna dotyczyć ograniczonego zakresu częstotliwości (zaznaczony okręgiem)

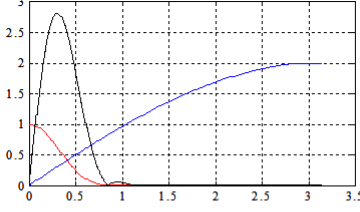
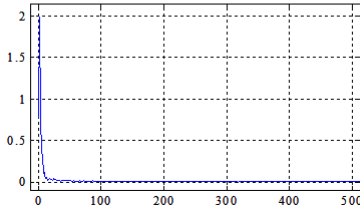





**PROGRAM ROZWOJOWY
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ**


Wyznaczanie pochodnych I-go rzędu



Operacja różniczkowania powinna dotyczyć ograniczonego zakresu częstotliwości. Rozwiązanie - przeprowadzenie filtracji dolnoprzepustowej, czyli ograniczenie pasma sygnału. Wynik obliczania różnicy skończonej jest bliski przebiegowi uzyskanemu dla sygnału bez szumu.







PROGRAM ROZWOJOWY POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

Układ obniżający częstotliwość próbkowania (decymator)

Układ decymujący - obniża częstotliwość próbkowania zadaną liczbę razy

Zastosowanie - produkt przetwarzania staje się silnie przepróbkowany (np. częstotliwość próbkowania wynosi 50x częstotliwość Nyquista). Jest tak np. przy wyznaczaniu przemieszczenia ruchomego obiektu w oparciu o zjawisko Dopplera. W efekcie musimy przechowywać nadmierną liczbę próbek – redundancja.

Uwaga – zabieg przeredzania powinien być poprzedzony filtracją dolnoprzepustową filtrem o częstotliwości granicznej niższej niż połowa częstotliwości próbkowania po decymacji.

Decymacja kaskadowa – jeśli konieczna wysoka krotność decymacji



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

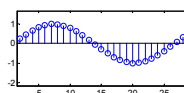
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



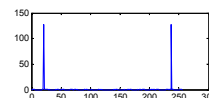
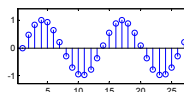
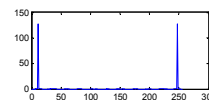
PROGRAM ROZWOJOWY POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

Układ decymujący

decymacja 2x – wybór co drugiej próbki sygnału, czyli obniżenie częstotliwości próbkowania (downsampling)



sygnał $\sin(2\pi(t-1) \cdot 40/1024)$



Sygnał przed (górną) i po (dół) decymacji 2x

Moduł DTF sygnału przed i po decymacji 2x. Zakres częstotliwości 0-f. próbkowania

Widoczny 2x wzrost stosunku częstotliwości sygnału do f. próbkowania, który wynika z 2x spadku f. próbkowania (skalowanie osi f w jednostkach względnych)



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY





PROGRAM ROZWOJOWY
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

Układ decymujący (decymator) 2x



Równanie decymatora 2x $y(m) = x(2m)$

jego TF $Y(\omega) = \frac{1}{2}[X(\omega/2) + X(\pi + \omega/2)] = \frac{1}{2}[X(\omega/2) + X^*(\pi - \omega/2)]$



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA ROZWOJU

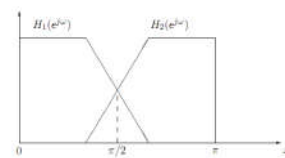
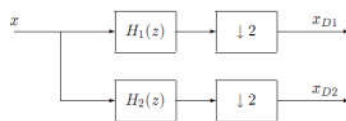
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



PROGRAM ROZWOJOWY
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

Bank filtrów do dekompozycji sygnału na podpasma

Filtr dolnoprzepustowy H_1 o pasmie do $\pi/2$ oraz filtr górnoprzepustowy H_2 o pasmie powyżej $\pi/2$. Pasmo sygnału ograniczone jest do π (tw. Nyquista). Po każdej filtracji następuje 2x decymacja.



$\downarrow 2$ - oznacza dwukrotną decymację
(odrzućenie co drugiej próbki - 2x obniżenie fs)



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA ROZWOJU

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



Bank filtrów - dekompozycja sygnału na podpasma

TF ciągu wyjściowego decymatora:

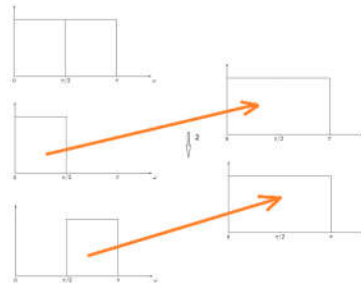
$$Y(\omega) = \frac{1}{2}[X(\omega/2) + X^*(\pi - \omega/2)]$$

Moduły TF

Moduł widma ciągu wejściowego decymatora (pasmo od 0 do π)

Podział pasma, decymacja części dolnej widma

Podział pasma, decymacja części górnej widma

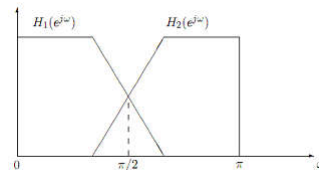
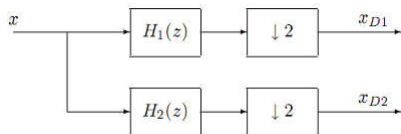


$$Y(0) = \frac{1}{2}[X(0) + X^*(\pi)] = \frac{1}{2}X^*(\pi) \Rightarrow |Y(0)| = \frac{1}{2}|X^*(\pi)| = \frac{1}{2}|X(\pi)|$$

$$Y(\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{2}[X(\frac{\pi}{4}) + X^*(\pi - \frac{\pi}{4})] = \frac{1}{2}[X^*(\frac{3\pi}{4})] \Rightarrow |Y(\pi/2)| = \frac{1}{2}|X^*(\frac{3\pi}{4})| = \frac{1}{2}|X(\frac{3\pi}{4})|$$



Bank filtrów do dekompozycji sygnału na podpasma



Z punktu widzenia bieżącej częstotliwości próbkowania (po decymacji) pasma sygnałów x_{D1} i x_{D2} są takie same i wynoszą:

$$0 \leq \omega < \pi$$

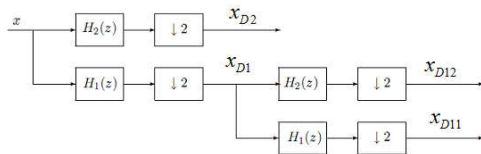
Jednak z punktu widzenia podziału sygnału x na podpasma każdy z sygnałów wyjściowych x_D zawiera inne podpasmo sygnału x !!!





**PROGRAM ROZWOJOWY
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ**

Bank filtrów - dekompozycja sygnału na podpasma cd



Każdy z sygnałów x_{D1} , x_{D2} , x_{D11} i x_{D12} zawiera inne podpasmo sygnału x !!!

Sygnal/widmo

podpasmo

$$X_{D2}(\omega) = \frac{1}{2} X^*(\pi - \omega/2)$$

$$\pi/2 \leq \omega \leq \pi$$

$$X_{D1}(\omega) = \frac{1}{2} X(\omega/2)$$

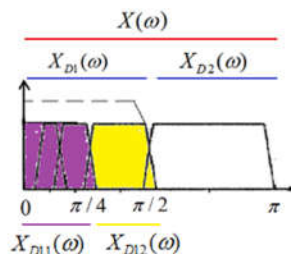
$$0 \leq \omega \leq \pi/2$$

$$X_{D12}(\omega) = \frac{1}{4} X^*(\pi/2 - \omega/4)$$

$$\pi/4 \leq \omega \leq \pi/2$$

$$X_{D11}(\omega) = \frac{1}{2} X(\omega/4)$$

$$0 \leq \omega \leq \pi/4$$



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



**PROGRAM ROZWOJOWY
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ**

Układ interpolujący (interpolator)

Układ podnoszący częstotliwość próbkowania przez wstawienie zer między próbki istniejącego sygnału i filtrację dolnoprzepustową (najprostszą metodą).

Inne metody – aproksymacja wielomianowa, funkcje sklejane



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

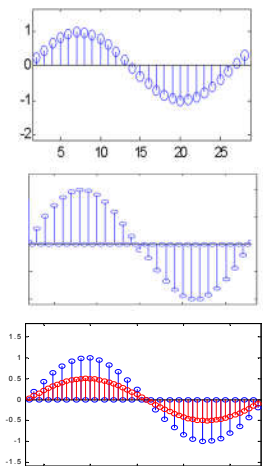
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



**PROGRAM ROZWOJOWY
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ**

Układ interpolujący (interpolator)

Przykład:
 $h = \sin(2\pi \cdot (t-1) \cdot 40/1024)$;
 interpolacja zerami 2x

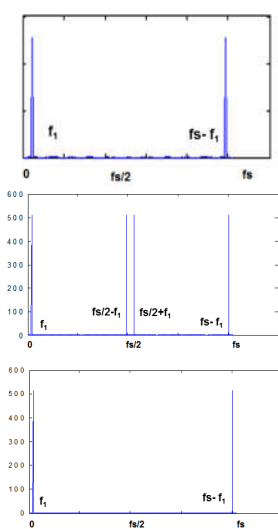


sygnał przed interpolacją i moduł jego DFT
 $f_1 \cong 0.1 \text{ fs}$

sygnał interpolowany i moduł jego DFT

sygnał interpolowany przed filtracją (niebieski) i po filtracji (czerwony); moduł DFT sygnału po filtracji

Ponieważ podwojono fs , zmianie ulega relacja f_1 i $fs - f_1 \cong 0.05 \text{ fs}$




KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

**PROGRAM ROZWOJOWY
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ**

Układ interpolujący 2x (interpolator)



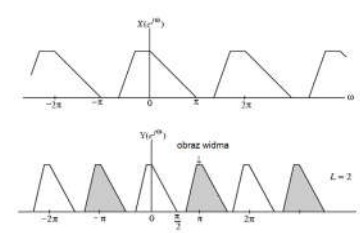
ciąg $x(n)$ $x(k) = x(0) + x(k-1) + x(k-2) + \dots + x(k-n) + \dots$

ciąg $y(n)$ $y(k) = x(0) + 0 + x(k-2) + 0 + x(k-4) + \dots + 0 + x(k-2m) + \dots$

Przekształcenie Z ciągu y dla interpolatora 2x $Y(z) = X(0) + X(1)z^{-2} + X(2)z^{-4} + \dots + X(m)z^{-2m} = X(z^2)$

TF ciągu y dla 2x interpolacji

$Y(\omega) = X(2\omega) = X(2\omega - 2\pi) = X^*(2(\pi - \omega))$



Moduł widma sygnału po 2x interpolacji.

Zaznaczony kolorem szarym tzw. obraz widma sygnału eliminuje się drogą filtracji dolnoprzepustowej.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY