



**PROGRAM ROZWOJOWY  
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ**

# PRZETWARZANIE SYGNAŁÓW

SEMESTR V

*Człowiek - najlepsza inwestycja*



**KAPITAŁ LUDZKI**  
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

**UNIA EUROPEJSKA**  
EUROPEJSKI  
FUNDUSZ SPOŁECZNY



*Projekt współfinansowany przez Unię Europejską  
w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego*

Wykład IV

## **Metody czasowo-częstotliwościowego opisu sygnałów**

## **Metody opisu czasowo-częstotliwościowego sygnałów**

### **Krótkookresowa transformacja Fouriera**

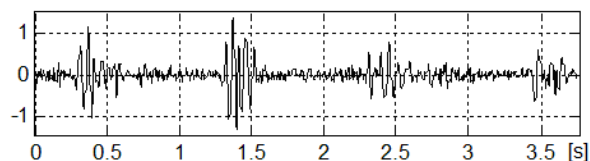
#### **Dziedziny opisu sygnałów**

Dziedzina czasu – sygnały najczęściej przedstawiają przebieg zmian pewnej wielkości w czasie.

Dziedzina częstotliwości – częstotliwość jest pojęciem wykorzystywanym wszędzie tam, gdzie występują zjawiska o charakterze okresowym - wykorzystanie transformaty Fouriera. Często interpretacja/ocena właściwości sygnału jest łatwiejsza w dziedzinie częstotliwości niż w dziedzinie czasu.

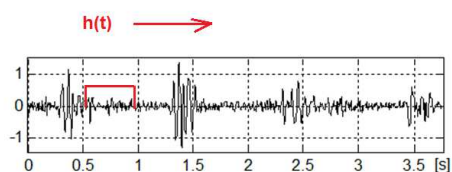
Wynik TF można interpretować jako rozkład sygnału na nieskończony zbiór składowych  $\exp(j\omega t)$ , których lokalizacja w czasie jest nieokreślona (czas trwania funkcji  $\exp(j\omega t)$  analizujących jest równy czasowi trwania analizowanego sygnału). Jeśli właściwości częstotliwościowe sygnału będą ewoluować w funkcji czasu, TF nie zapewni informacji o lokalizacji tych zmian wzdłuż osi czasu.

Sygnaly spotykane w praktyce pomiarowej są często niestacjonarne, tzn. ich parametry ulegają zmianie w funkcji czasu. Analiza dłuższego odcinka takiego sygnału, np. całego sygnału przedstawionego poniżej prowadzić może do utraty informacji o zmianach jego właściwości w czasie:



## Czasowo-częstotliwościowa analiza sygnałów

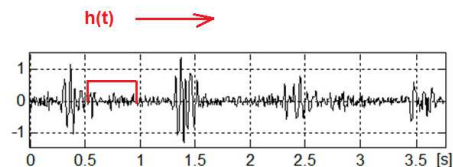
Sygnaly spotykane w praktyce pomiarowej są często niestacjonarne, tzn. ich parametry ulegają zmianie w funkcji czasu. Analiza dłuższego odcinka takiego sygnału prowadzić może do utraty informacji o zmianach jego właściwości w czasie. Aby tego uniknąć, w najprostszym podejściu stosuje się intuicyjne rozwiązanie – przeprowadza się analizę widmową kolejnych fragmentów sygnału ‘wyciętych’ przy pomocy funkcji  $h(t)$ , na rysunku poniżej jest to funkcja (okno) prostokątna.



Przy wyborze czasu trwania okna dążymy do tego, by zmiany właściwości sygnału były w ramach okna zaniedbywalne/nieistotne z punktu widzenia zastosowania.

## Czasowo-częstotliwościowa analiza sygnałów

Aby tego uniknąć utraty informacji o zmianach właściwości sygnału w czasie, przeprowadza się analizę widmową kolejnych fragmentów sygnału, dążąc do tego, by zmiany jego właściwości były w tych fragmentach zaniedbywalne.



Rozwiązanie takie nosi nazwę krótkookresowej transformacji Fouriera (STFT - Short-Term Fourier Transform). Przedstawia je zapis:

$$F(t, f, h) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u)h(u-t) \exp(-j2\pi f(t-u)) du$$

Funkcja  $h()$  jest oknem przesuwającym się wzdłuż osi czasu i wycinającym kolejne fragmenty sygnału  $x()$  poddawane analizie widmowej, zmienna  $t$  określa położenie okna  $h()$ .

## Czasowo-częstotliwościowa analiza sygnałów STFT

$$F(t, f, h) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u)h(u-t) \exp(-j2\pi f(u-t)) du$$

Dla każdego  $t$  (położenia okna  $h()$  na osi czasu) powstaje pojedyncza transformata Fouriera fragmentu sygnału 'znajdującego się' w obrębie okna  $h$  dla danego  $t$ . W ten sposób powstaje ciąg krótkookresowych transformat Fouriera.

Ciąg ten służy do zbudowania tzw. spektrogramu. Jest to przedstawiony z użyciem skali barw na płaszczyźnie czas-częstotliwość ciąg kwadratów modułów TF, często prezentowany w skali logarytmicznej.

$$S(t, f, h) = |F(t, f, h)|^2 = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} x(u)h(u-t) \exp(-j2\pi f(u-t)) du \right|^2$$

Obecność funkcji  $h()$  sprawia, że wynik TF jest splotem transformat  $X(\omega)$  i  $H(\omega)$ , z konsekwencjami w postaci m.in. przecieku widma. Istotne znaczenie mają tu właściwości funkcji  $h()$ .

W wyniku podzielenia kwadratu modułu TF przez czas trwania analizowanego fragmentu sygnału otrzymuje się widmową gęstość mocy.

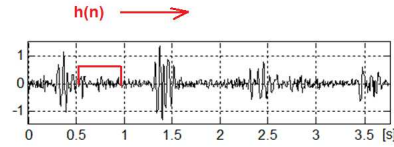
## STFT i spektrogram

Dyskretna STFT:

$m=0,1\dots N-1$  (czyli DFT!!)

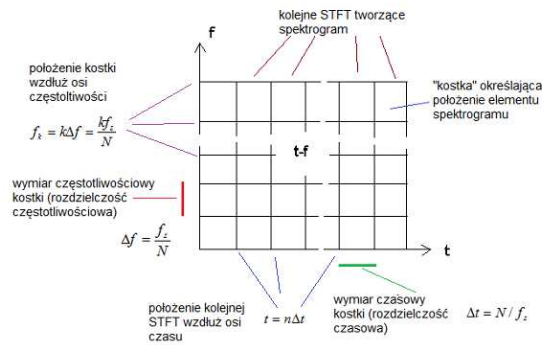
$n$  określa położenie fragmentu sygnału

Ciąg kwadratów modułów STFT dla kolejnych  $n$  - spektrogram



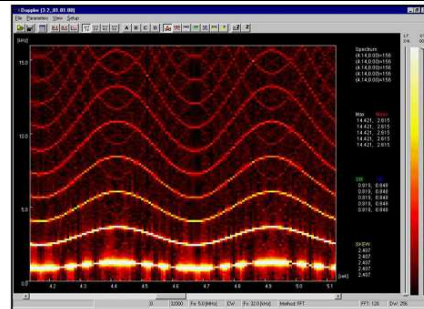
$$F_x(n, m, h) = \sum_{k=n}^{N-1+n} x(k)h(k-n)\exp(-j2\pi m(k-n)/N)$$

$$\{|F_x(n, m, h)|^2\}$$



## Spektrogram

Spektrogram - ciąg kwadratów modułów TF widm chwilowych (krótkookresowych transformat Fouriera), przedstawiony z użyciem skali barw na płaszczyźnie czas-częstotliwość, często w skali logarytmicznej



Spektrogram sygnału prostokątnego z modulacją częstotliwości.

Sygnal prostokątny zawiera nieparzyste harmoniczne składowej podstawowej. Przy braku modulacji pojedynczy element („pasek”) spektrogramu sygnału ma postać:

$$S\{rect_T(t)\} = \left| \frac{2\pi A \tau}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sin c\left(\frac{n\pi\tau}{T}\right) \delta(\omega - n\omega_0) \right|^2$$

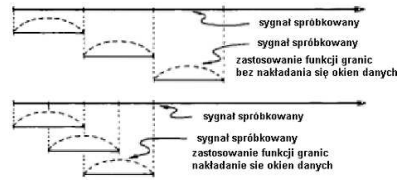
W obecności modulacji zmianie ulega  $\omega_0$  oraz wszystkie harmoniczne. Widoczne skutki niespełnienia tw. Nyquista dla harmonicznych powyżej 13.

## Widmowa gęstość mocy – procedura obliczania

1. Zebrać ciąg próbek sygnału  $x_n, n=0, 1, \dots, N-1$
2. Zastosować funkcję granic  $h_n: x_n h_n, n=0, 1, \dots, N-1$
3. Wyznaczyć DTF  $X_k$  ciągu  $x_n h_n, n, k=0, 1, \dots, N-1$
4. Wyznaczyć kwadrat modułu DTF dla  $k=0, 1, \dots, N/2-1$
5. Podzielić wynik przez  $N/fs$

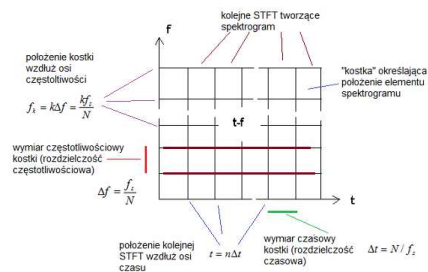
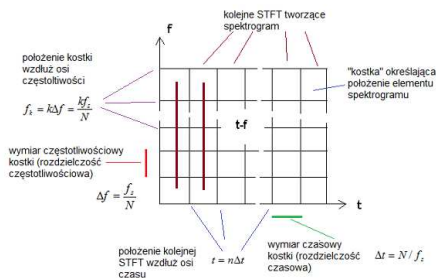
$$G_k = \frac{f_s}{N} \left| \sum_{n=0}^{N-1} h_n x_n \exp(-j \frac{2\pi n k}{N}) \right|^2$$

Zastosowanie innej niż okno prostokątne funkcji granic powoduje częściową utratę informacji w końcowej i początkowej części fragmentu sygnału (ciągu próbek). Dlatego – jeśli np. tworzymy spektrogram – stosuje się tzw. nakładanie się okien danych. Oznacza to, że kolejne odcinki sygnału wybiera się tak, że - przed pomnożeniem przez funkcję granic - nakładają się na siebie (np. na długości 50% odcinka).



## STFT - interpretacje

$$F_s(n, m, h) = \sum_{k=n}^{N-1+n} x(k) h(k-n) \exp(-j 2\pi m(k-n)/N)$$



## STFT - interpretacja II

$$F_x(n, m, h) = \sum_{k=n}^{N-1+n} x(k)h(k-n) \exp(-j2\pi m(k-n)/N) \quad \mathbf{h(k) - okno o długości N próbek}$$

ustalamy  $m=m_1$  tak że  $f=f_1=m_1/N$  oraz  $\omega_1=2\pi m_1/N$

okno  $h()$  jest symetryczne!!  $\mathbf{h(k)=h(-k) !!}$

$$F_x(n, m_1, h) = \sum_{k=n}^{N-1+n} x(k)h(k-n) \exp(-j2\pi m_1(k-n)/N) = \sum_{k=n}^{N-1+n} x(k)h[-(k-n)] \exp(-j2\pi m_1(k-n)/N)$$

modyfikacja znaków w funkcji  $\exp()$ :

$$F_x(n, m_1, h) = \sum_{k=n}^{N-1+n} x(k)[h(n-k) \exp(-j2\pi m_1(k-n)/N)] = \sum_{k=n}^{N-1+n} x(k)[h(n-k) \exp(j2\pi m_1(n-k)/N)]$$

## STFT - interpretacja II

$$F_x(n, m, h) = \sum_{k=n}^{N-1+n} x(k)h(k-n) \exp(-j2\pi m(k-n)/N)$$

$\mathbf{h(k) - okno o długości N próbek, okno h() jest symetryczne h(k)=h(-k) !!}$

$\mathbf{m=m_1}$  tak że  $f=f_1=m_1/N$  oraz  $\omega_1=2\pi m_1/N$

mamy postać:

$$F_x(n, m_1, h) = \sum_{k=n}^{N-1+n} x(k)[h(n-k) \exp(j2\pi m_1(n-k)/N)]$$

**STFT jest spłotem  $x(n)$  z iloczynem okna  $h(n)$  oraz zespolonej funkcji wykładniczej o pulsacji  $\omega_1$ :**

$$F_x(n, m_1, h) = \sum_{k=n}^{N-1+n} x(k)[h(n-k) \exp(j2\pi m_1(n-k)/N)] = x(n) * [h(n) \exp(j2\pi m_1 n / N)]$$

uzyskujemy ciąg wartości  $F_x$  dla pulsacji  $\omega_1$  dla kolejnych wartości  $n$  (położeń okna  $h$ )

## STFT - interpretacja II

STFT jest splotem  $x(n)$  z iloczynem okna  $h(n)$  i  $\exp(j\omega_1 n)$ :

$$F_x(n, m_1, h) = \sum_{k=n}^{N-1+n} x(k) [h(n-k) \exp(j2\pi m_1(n-k)/N)] = x(n) * [h(n) \exp(j2\pi m_1 n / N)]$$

uzyskujemy ciąg wartości  $F_x$  dla pulsacji  $\omega_1$  dla kolejnych wartości  $n$  (położeń okna  $h$ ).

czym jest iloczyn:  $h(k) \exp(j2\pi m_1 k / N)$

przesunięcie  $h(t)$  w  
dziedzinie częstotliwości

$$h(t) \exp(j\omega_0 t) \Rightarrow H(\omega - \omega_0)$$

przesunięcie  $h(t)$  w  
częstotliwości i czasie

$$h(t - t_0) \exp(j\omega_0 t) \Rightarrow H(\omega - \omega_0) \exp(-j\omega t_0)$$

## STFT - interpretacja II

$$F_x(n, m_1, h) = x(n) * [h(n) \exp(j2\pi m_1 n / N)] = x(n) * h(n, 2\pi m_1 / N) = x(n) * h(n, \omega_1)$$

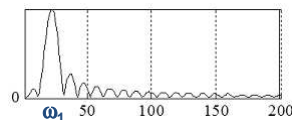
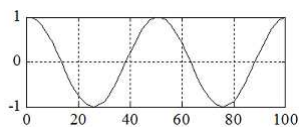
$$F_x(n, m_1, h) = x(n) * h(n, \omega_1)$$

funkcja  $h(n, \omega_1)$

$$\text{Re}\{h(k) \exp(j2\pi m_1 k / N)\}$$

funkcja  $|H(\omega - \omega_1)|$

$$\text{abs}\{F\{h(k) \exp(j2\pi m_1 k / N)\}\}$$



$$\omega_1 = 2\pi m_1 / N$$

Otrzymujemy splot  $x(n)$  z oknem  $h(n)$  pomnożonym przez zespoloną funkcję wykładniczą o pulsacji  $\omega_1$ . Oznacza to przesunięcie TF okna  $h(n)$  do pulsacji  $\omega_1$ .  $|H(\omega)|$  odpowiadający modułowi odpowiedzi częstotliwościowej układu dolnoprzepustowego staje się modułem odpowiedzi układu pasmowoprzepustowego  $|H(\omega - \omega_1)|$ .

$$F\{h(t) \exp(j\omega_1 t)\} \Rightarrow H(\omega - \omega_1)$$



## STFT - interpretacja II

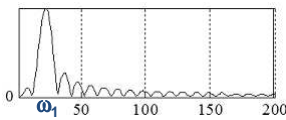
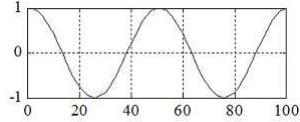
$h()$  - okno prostokątne

$$F_x(n, m, h) = x(n) * h(n, \omega)$$

ustalamy  $m_1$  oraz  $m_2 = 2m_1$

$$\text{Re}\{h(k) \exp(j2\pi m_1 k / N)\}$$

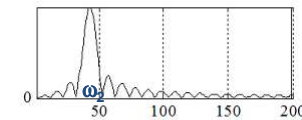
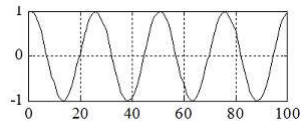
$$\text{abs}(F\{h(k) \exp(j2\pi m_1 k / N)\})$$



$$\omega_1 = 2\pi m_1 / N$$

$$\text{Re}\{h(k) \exp(j2\pi m_2 k / N)\}$$

$$\text{abs}(F\{h(k) \exp(j2\pi m_2 k / N)\})$$



$$\omega_2 = 2\pi m_2 / N = 2\omega_1$$

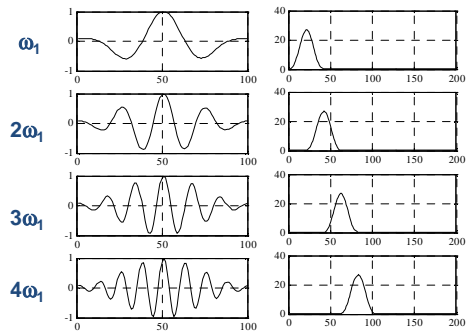
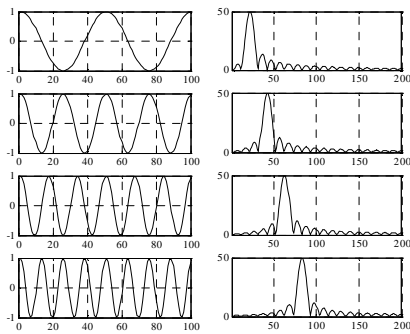
Otrzymujemy moduły TF okna  $h(t)$  przesunięte odpowiednio do  $\omega_1$  i  $\omega_2$  !!

## STFT - zespół (bank) filtrów

$$F_x(n, m, h) = x(n) * h(n, \omega)$$

$h(t)$  - okno prostokątne

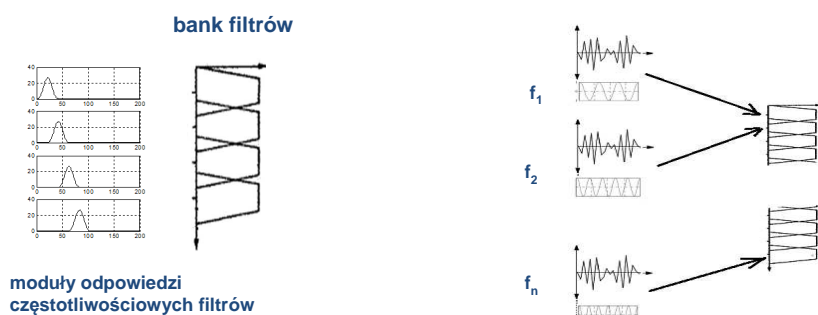
$h(t)$  - okno Hamminga



## STFT zespół (bank) filtrów

Składową STFT o pulsacji  $\omega_0$  można interpretować jako produkt filtracji sygnału  $x(t)$  filtrem pasmowo-przepustowym o odpowiedzi  $H(\omega - \omega_0)$ , powstałego z „filtru-matki”  $H(\omega)$  przez przesunięcie na osi częstotliwości.

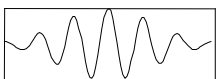
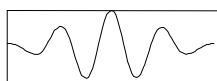
STFT - bank filtrów pasmowo-przepustowych o stałym paśmie.



moduły odpowiedzi częstotliwościowych filtrów

## STFT - interpretacje

$$F_x(n, m, h) = \sum_{k=n}^{N-1+n} [x(k)h(k-n)] \exp(-j2\pi n(k-n)/N)$$



**Pierwsza interpretacja:** sygnał  $x(t)$  można przedstawić w postaci sumy fal elementarnych o postaci:  $h(t) \exp(j2\pi n/N)$

które są określane mianem „atomów częstotliwościowych”

**Druga interpretacja** - STFT jest splotem sygnału wejściowego z odpowiedzią impulsową filtra powstałego w wyniku pomnożenia okna  $h(t)$  i zespolonej funkcji wykładniczej

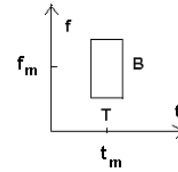
przesunięcie  $h(t)$  w dziedzinie częstotliwości  $h(t) \exp(j\omega_0 t) \Rightarrow H(\omega - \omega_0)$

przesunięcie  $h(t)$  w dziedzinie częstotliwości i czasie  $h(t - t_0) \exp(j\omega_0 t) \Rightarrow H(\omega - \omega_0) \exp(-j\omega t_0)$

$$F_x(n, m_1, h) = \sum_{k=n}^{N-1+n} x(k) [h(n-k) \exp(j2\pi n_1(n-k)/N)] = x(n) * h(n, \omega)$$

## Lokalizacja sygnału w dziedzinie czasu i częstotliwości

Sygnał można opisać na płaszczyźnie t-f podając jego „średnie położenie” ( $t_m$ ,  $f_m$ ) oraz obszar zlokalizowania głównej części energii sygnału, proporcjonalny do iloczynu T\*B. Powstaje tzw. „kostka” przedstawiająca położenie sygnału na płaszczyźnie t-f.



Czas („średni”) 
$$t_m = \frac{1}{E_x} \int_{-\infty}^{+\infty} t |x(t)|^2 dt$$

Czas trwania 
$$T^2 = \frac{1}{E_x} \int_{-\infty}^{+\infty} (t - t_m)^2 |x(t)|^2 dt$$

Średnia częstotliwość 
$$f_m = \frac{1}{E_x} \int_{-\infty}^{+\infty} f |X(f)|^2 df$$

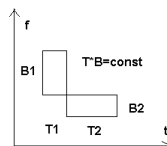
Szerokość widma (pasmo) 
$$B^2 = \frac{1}{E_x} \int_{-\infty}^{+\infty} (f - f_m)^2 |X(f)|^2 df$$

gdzie E jest energią sygnału 
$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt < \infty$$

## Lokalizacja sygnału w dziedzinie czasu i częstotliwości

Sygnał można zlokalizować na płaszczyźnie t-f podając jego „średnie położenie” ( $t_m$ ,  $f_m$ ) oraz obszar zlokalizowania głównej części energii sygnału, proporcjonalny do iloczynu T\*B. Powstaje tzw. „kostka” przedstawiająca położenie sygnału na płaszczyźnie t-f. „Wymiary” T i B określają dokładność lokalizacji sygnału.

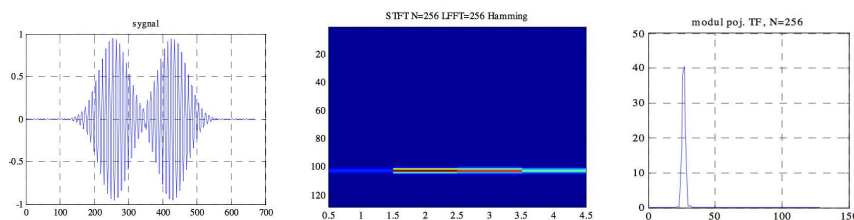
Rozdzielczość czasowa i częstotliwościowa STFT są funkcjami czasu trwania T okna analizy h(t); iloczyn „wymiarów” B (rozdzielczość częstotliwościowa) i T jest wartością stałą – wzrost jednej z tych wartości implikuje spadek drugiej.



$$B = f_s / N = 1/T$$

## STFT i spektrogram – lokalizacja - przykład

Sygnał wejściowy: 2 sygnały cosinus z gaussowską modulacją amplitudy, różniące się położeniem na osi czasu,  $t=0:0.001:0.511$ ;  $x=\sin(2*\pi*t*100)$ ;  $\text{win}=\text{gausswin}(512,6)$ ;  $y=x.*\text{win}.$ ;  $z=[y(1:350) y(180:500)]$ ;



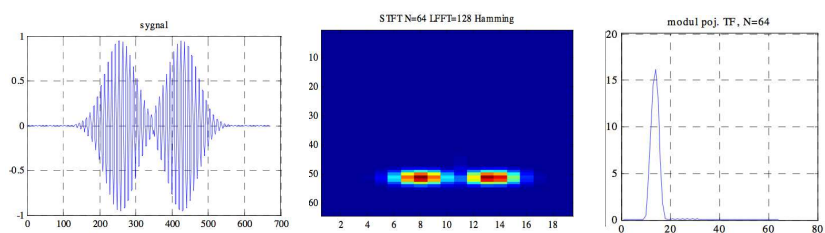
$h(t)=\text{hamming}(256)$

dobra rozdzielczość (lokalizacja) częstotliwościowa,  
słaba rozdzielczość czasowa - nie można określić  
przedziału czasu występowania każdej składowej

kostka rozdzielczości



## STFT i spektrogram - lokalizacja - przykład



$h(t)=\text{hamming}(64)$

lepszta rozdzielczość czasowa, obniżona (w  
porównaniu do poprzedniego przypadku)  
rozdzielczość częstotliwościowa

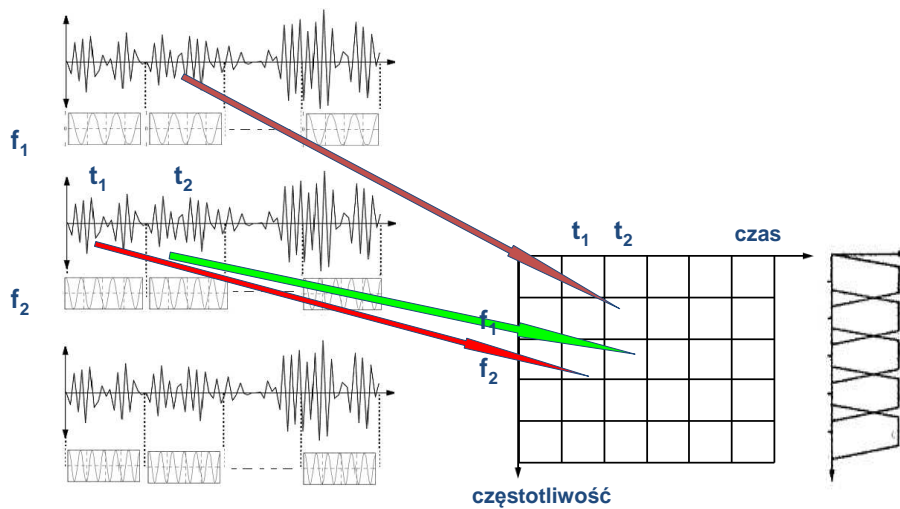
kostka rozdzielczości



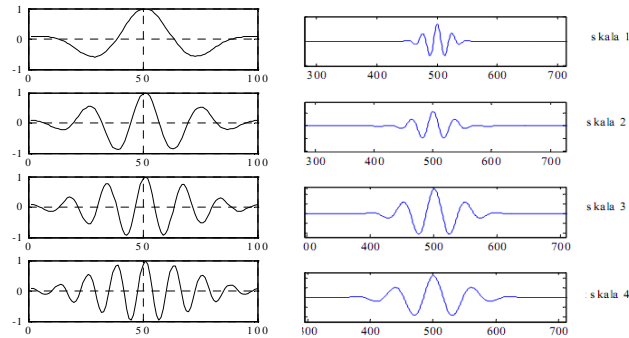
# Metody opisu czasowo-częstotliwościowego sygnałów

## Transformacja falkowa

### STFT – bank filtrów o stałej szerokości pasma



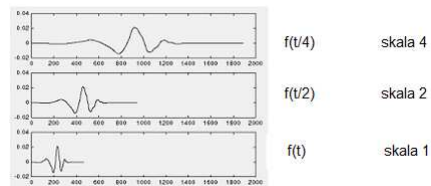
## Bank filtrów o stałej i zmieniającej się z $f_0$ szerokości pasma – odpowiedzi impulsowe



Odpowiedź impulsowa podlega zmianie skali  $s$ , tj.  $s$ -krotnemu spadkowi częstotliwości środkowej odpowiedzi  $s$ -krotnie wzrasta jej czas trwania, a więc  $s$ -krotnie maleje pasmo odpowiadające jej filtru

## Skala

Czym jest zmiana skali – zmiana czasu trwania sygnału połączona ze zmianą jego właściwości częstotliwościowych.

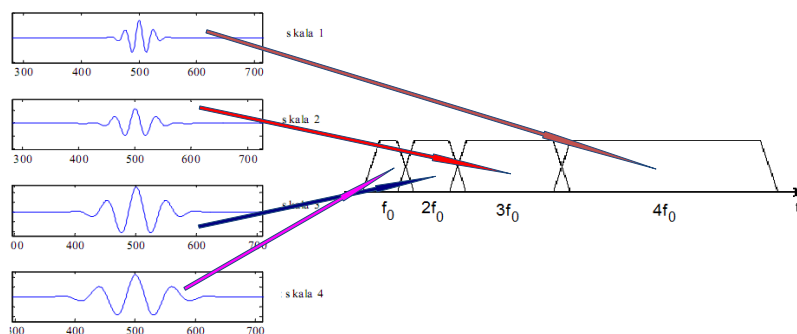


Skala określa stopień kompresji/ dylatacji i zmiany częstotliwości.

## Inne banki filtrów

Zamiast filtra o stałej szerokości pasma (STFT) można zaproponować filtr o stałym stosunku szerokości pasma do częstotliwości środkowej

Odpowiedzi impulsowe filtrów



## Transformacja falkowa

Analiza falkowa nasuwa skojarzenia z krótkookresowym przekształceniem Fouriera w interpretacji „bank filtrów”, przy czym zmianie skali towarzyszy zmiana czasu trwania odpowiedzi filtru, nie tylko jego częstotliwości środkowej. Analogicznie jak w przypadku TF, gdzie wyznaczamy (dla ustalonego opóźnienia i ustalonej pulsacji  $\omega_0$ ) korelację analizowanego sygnału z funkcją  $\exp(j\omega_0 t)$ , w przypadku analizy falkowej możemy mówić o wyznaczaniu korelacji między sygnałem analizowanym a falką.

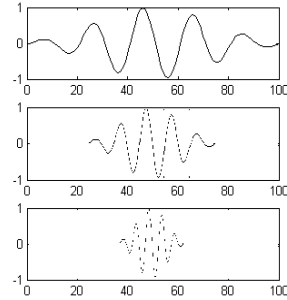
Transformacja falkowa która służyć może np. uwypukleniu istotnych właściwości sygnału. Podobnie jak w przypadku TF i bazy funkcji ortogonalnych  $\exp(j\omega_0 t)$  oczekujemy, że transformacja ta będzie pozbawiona redundancji – możliwie niska liczba wyników analizy falkowej (współczynników falkowych) będzie niezerowa. Oznacza to m.in., że zbiór falek powinien być zbiorem funkcji ortogonalnych.



## Transformacja falkowa

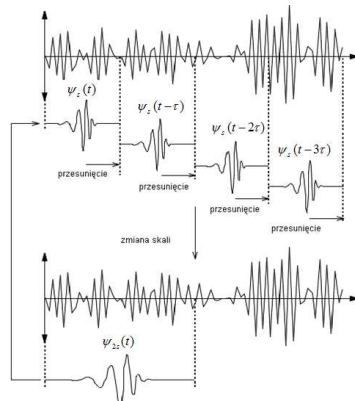
Zbudowanie zestawu filtrów o różnych częstotliwościach środkowych i różnych czasach trwania odpowiedzi impulsowych, czyli różnych szerokościach pasma filtru. Różne czasy trwania odpowiedzi (falek) odpowiadają różnym rozdzielczościom czasowym i zarazem różnym wartościom skali.

Transformacja falkowa może być interpretowana analogicznie jak STFT - polega na wyznaczeniu odpowiedzi kolejnych filtrów na pobudzenie analizowanym sygnałem. W wyniku otrzymujemy wartości współczynników rozkładu falkowego.



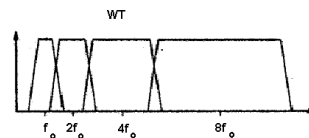
Transformacja falkowa – Wavelet Transform - WT

## Transformacja falkowa



Różnica między STFT a transformacją falkową leży w tym, że zmianie skali towarzyszy zmiana zarówno czasu trwania jak i częstotliwości falki analizującej (kształt falki nie ulega zmianie).

$\psi(t)$  – funkcja falkowa







## Transformacja falkowa

Co zapewnia WT w związku z różnicami w stosunku do STFT???

- wykrywanie nieciągłości/krótkotrwałych struktur w sygnale (np. impulsowych zakłóceń w sieci energetycznej); dotyczy to także przetwarzania informacji 2D (np. obraz powierzchni) – badanie regularności/nieregularności.
- eliminację szumów z sygnałów, adaptacyjną eliminację szumów, ograniczanie redundacji w danych (kompresja), analizę sygnałów w podpasmach.

W zastosowaniach medycznych WT umożliwia m.in. wykrywanie stanów przejściowych w EEG (elektroencefalogram) i potencjałów wywołanych.

$$d(j,k) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\psi_{j,k}(t)dt$$

## Ciągła transformacja falkowa CWT

Prosta CWT

$$\gamma(s, \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\psi_{s,\tau}^*(t)dt$$

Odwrotna CWT

$$f(t) = \frac{1}{C_{\psi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma(s, \tau)\psi_{s,\tau}^*(t)d\tau \frac{1}{s^2} ds$$

$$C_{\psi} = \int \frac{|\Psi(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega$$

Falka  $\psi_{s,\tau}(t) = \frac{1}{\sqrt{s}} \psi\left(\frac{t-\tau}{s}\right)$

s- współczynnik skali,  $\tau$  – przesunięcie

falka podstawowa – s=1,  $\tau=0$

Wymagania – falka powinna zajmować wąskie pasmo i zniknąć poza nim, w ten sposób eliminować będzie szerokie (wolnozmiennie - częstotliwość poniżej pasma falki) i wąskie (szybkoszmiennie- częstotliwość powyżej pasma falki) struktury sygnału.

## Warunki dla funkcji falkowej $\psi(t)$

$$\int \frac{|\Psi(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < +\infty \quad \text{tzw. warunek dopuszczalności;}$$

Oznacza on, że:

$$|\Psi(\omega)|^2|_{\omega=0} = 0 \quad \text{transformata Fouriera } F[\psi(t)] \text{ znika dla } \omega=0$$

$$\int \psi(t) dt = 0 \quad \text{co oznacza że składowa średnia } \psi(t) \text{ jest równa zero}$$

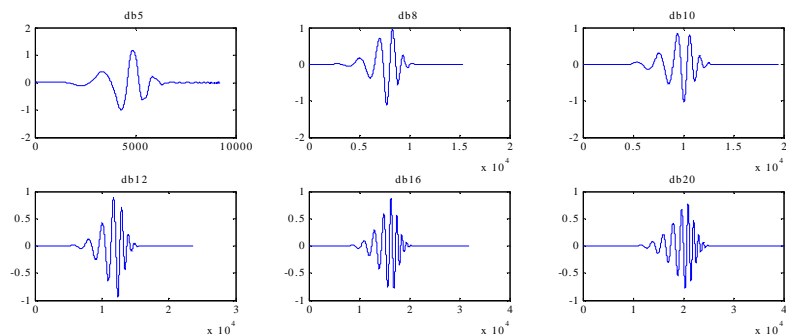
$\psi(t)$  musi więc mieć przebieg oscylacyjny

$$M_p = \int t^p \psi(t) dt \rightarrow 0 \quad \text{momenty funkcji } \psi(t) \text{ są bliskie zero; oznacza to, że}$$

falka jest gładka i skoncentrowana w czasie i częstotliwości

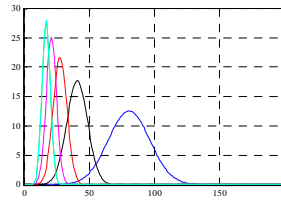
## Przykładowe rodziny falek I

### Rodzina falek Daubechies (rzeczywiste), skala 1

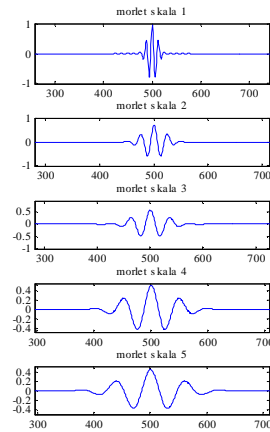


## Przykładowe rodziny falek II

Falka Morleta  $\psi(t) = \frac{1}{\sqrt{s}} \exp[-\frac{1}{2}((t-\tau)/s)^2] \cos[5(t-\tau)/s]$



Moduły widm falek Morleta dla s=1-5



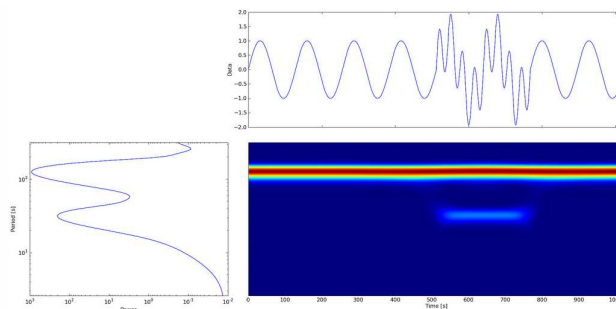
Związek między współczynnikiem skali s i pulsacją środkową falki:

$$\omega_s = \omega_0/s,$$

gdzie  $\omega_0$  jest pulsacją środkową falki podstawowej (s=1)

## Obraz modułów współczynników rozwinięcia falkowego

Sygnał



Wybrany przekrój modułu obrazu współczynników

## Ciągła a dyskretna transformacja falkowa

Obliczenia prowadzone są oczywiście na danych dyskretnych – skąd więc rozróżnienie na transformację ciągłą i dyskretną?

CWT może operować z dowolnymi wartościami skali oraz z dowolnym (ciągłym) przesunięciem czasowym.

Powoduje to powstawanie bardzo dużej ilości danych – redundancja, oraz implikuje znaczne obciążenie obliczeniowe, niekoniecznie celowe.

$$\psi_{s,\tau}(t) = \frac{1}{\sqrt{s}} \psi\left(\frac{t-\tau}{s}\right)$$

## Dyskretna transformacja falkowa DWT

CWT – redundancja i nadmiar obliczeń;

eliminacja – dyskretna transformacja falkowa, polegająca na ograniczeniu zbioru wartości współczynników skali i przesunięć czasowych:

$$\psi_{j,k}(t) = \frac{1}{\sqrt{s_0^j}} \psi\left(\frac{t-k\tau_0 s_0^j}{s_0^j}\right)$$

$j, k$  – liczby całkowite,  $s_0 > 1$  – krok dylatacji (skalowania),  $\tau_0$  – przesunięcie

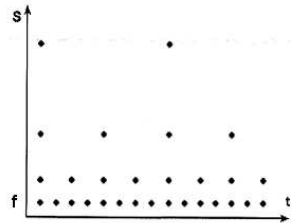
W efekcie dostajemy dyskretny rozkład punktów na płaszczyźnie czas-skala (częstotliwość), w których wyznaczana jest transformacja falkowa (współczynnik rozwinięcia falkowego).

Jeśli  $s_0=2$ , mamy diadyczny (oktawowy) podział osi częstotliwości, jeśli  $\tau_0=1$ , taki sam podział dotyczy położenia na osi czasu:

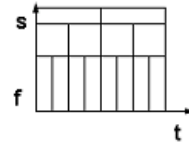
$$\psi_{j,k}(t) = \frac{1}{\sqrt{2^j}} \psi\left(\frac{t-k2^j}{2^j}\right)$$

## Dyskretna transformacja falkowa DWT

Położenie kostek rozdzielczości na płaszczyźnie czas-skala oraz podział płaszczyzny czas-skala



$$\psi_{j,k}(t) = \frac{1}{\sqrt{2^j}} \psi\left(\frac{t-k2^j}{2^j}\right)$$



Dyskretna transformacja falkowa - współczynniki:

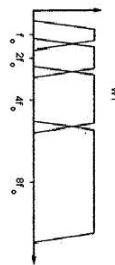
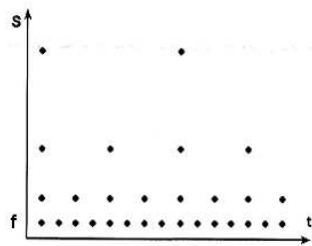
$$d(j,k) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \psi_{j,k}^*(t) dt$$

Dyskretna transformacja odwrotna:

$d(j,k)$  – współczynniki rozwinięcia falkowego

$$f(t) = \sum_{j,k} d(j,k) \psi_{j,k}(t)$$

## Dyskretna transformacja falkowa DWT



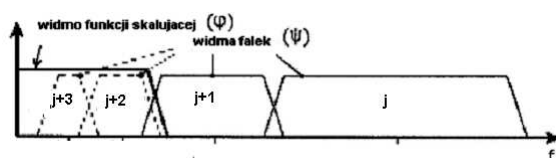
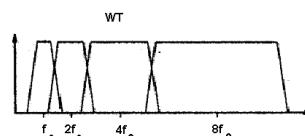
$$\psi_{j,k}(t) = \frac{1}{\sqrt{2^j}} \psi\left(\frac{t-k2^j}{2^j}\right)$$

Kolejne falki dla kolejnych poziomów skali  $j$  (skala=2!!!!) będą związane z odpowiedziami impulsowymi kolejnych filtrów pasmowych. Częstotliwości środkowe i pasma tych filtrów maleją jak 2!

Wyniki filtracji - współczynniki rozwinięcia falkowego na danym poziomie skali.

## Bank filtrów do dekompozycji sygnału na podpasma i transformacja falkowa

Transformację falkową zaczęliśmy omawiać rozpoczynając operacje na próbkach sygnału i dzieląc pasmo na połowy, a następnie przesuwając się z krokiem  $1/2^j$  w kierunku malejących częstotliwości. Aby zapewnić analizę do częstotliwości 0Hz, należałoby użyć nieskończonej liczby falek. Nie jest to realizowalne. Pojawia się konieczność zastąpienia nieskończonej liczby falek nową funkcją, mającą widmo sięgające początku układu. Jest to tzw. funkcja skalująca, która odpowiada filtracji dolnoprzepustowej.

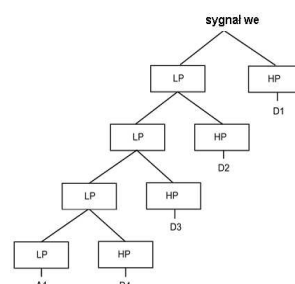


## Filtracja a DWT – podział na podpasma

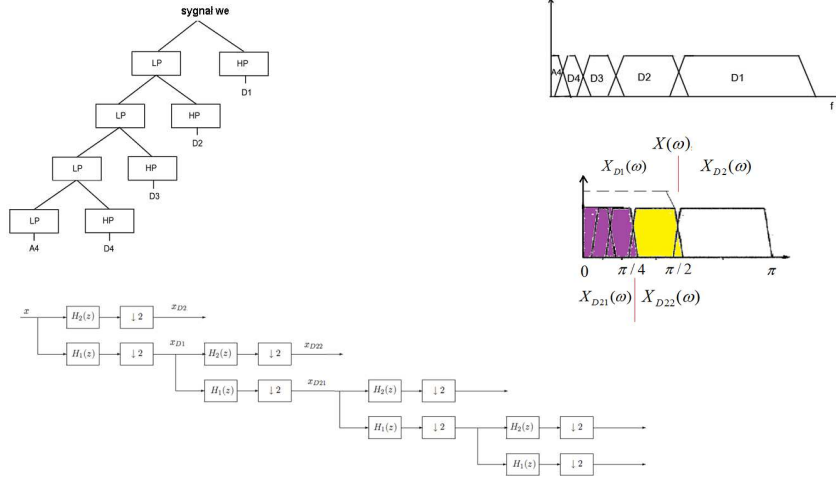
Transformację falkową traktować można jako proces filtracji, schematycznie przedstawiony na rysunku obok.

Na każdym poziomie (skali) dokonujemy filtracji dolno- i pasmowo-przepustowej, przy czym w wyniku tej pierwszej otrzymujemy zgrubną reprezentację sygnału (aproksymację), a w wyniku drugiej – reprezentację szczegółową (na danym poziomie skali). Na każdym poziomie dekompozycji współczynniki są 2-krotnie decymowane, w celu ograniczenia liczby produktów transformacji falkowej – pozostaje ona równa liczbie próbek sygnału.

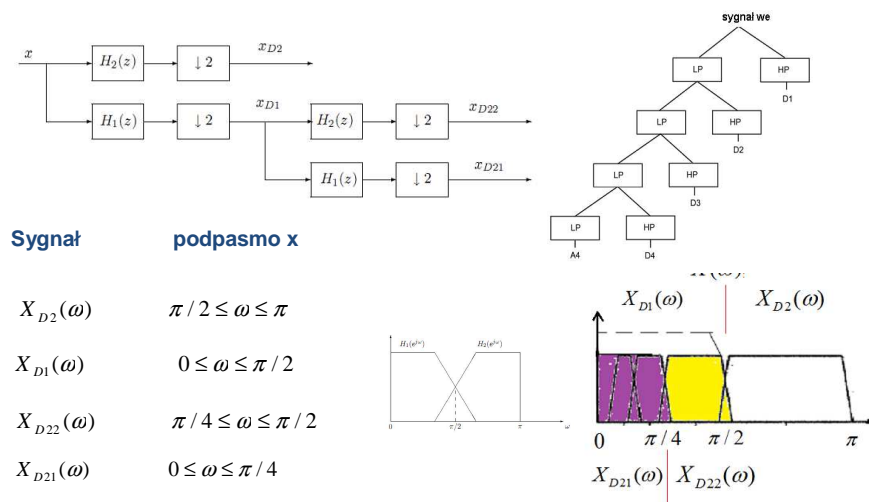
W efekcie otrzymujemy wynik składający się z reprezentacji zgrubnej (na najwyższym poziomie skali) oraz reprezentacji szczegółowych uzyskanych na wszystkich poziomach.



## DWT a dekompozycja sygnału na podpasma



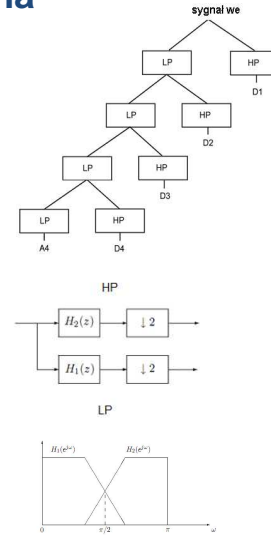
## DWT a dekompozycja sygnału na podpasma





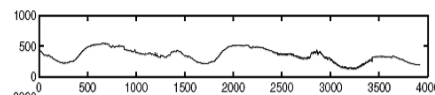
## Dekompozycja falkowa, podział na podpasma, współczynniki DWT

Na każdym poziomie dekompozycji współczynniki są 2-krotnie decymowane. Z 2-krotnej decymacji kolejnych produktów dekompozycji wynika możliwość wykorzystania na każdym poziomie skali tych samych filtrów, dzielących na każdym poziomie pasmo sygnału na dwie równe części (relacja pasma filtrów do częstotliwości próbkowania dla danej skali (po decymacji!!) nie ulega zmianie).



## Przykład dekompozycji i rekonstrukcji falkowej sygnału

Sygnał oryginalny



Współczynniki aproksymacji A3



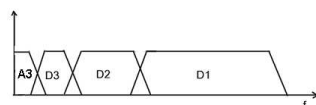
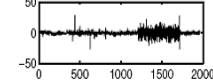
Współczynniki detalu D3



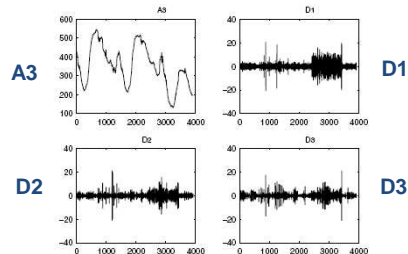
Współczynniki detalu D2



Współczynniki detalu D1



Na podstawie współczynników można odtworzyć/ zrekonstruować reprezentację szczegółowe/detale dla kolejnych poziomów skali oraz aproksymację. Wykres powyżej przedstawia zużycie energii elektrycznej w okresie 3 dni (Matlab User's guide).



Rekonstrukcja: