

Laboratorium Przetwarzania Sygnałów

Ćwiczenie 1

„Analiza widmowa”

Opracowali:

- prof. nzw. dr hab. inż. Krzysztof Kałużyński
- dr inż. Beata Leśniak-Plewińska
- dr inż. Jakub Żmigrodzki

Zakład Inżynierii Biomedycznej,
Instytut Metrologii i Inżynierii Biomedycznej,
Wydział Mechatroniki Politechniki Warszawskiej.

Warszawa, 2010

1. Cel ćwiczenia.

W ramach ćwiczenia studenci zapoznają się z podstawowymi właściwościami i metodami opisu sygnałów deterministycznych, przekształceniem Fouriera, twierdzeniem o próbkowaniu, funkcjami granic oraz spektrogramem.

2. Wymagane wiadomości.

1. Podstawowe kryteria podziału sygnałów.
2. Podstawowe parametry sygnałów: wartość międzyszczytowa, amplituda, wartość średnia, wartość skuteczna, moc sygnału.
3. Twierdzenie o próbkowaniu.
4. Przekształcenie Fouriera i jego własności, widmo amplitudowe, widmowa gęstość mocy.
5. Uzupełnianie zerami (zero padding).
6. Przeciek widma.
7. Funkcje granic.
8. Właściwości sygnału analitycznego.
9. Spektrogram i sposoby jego wyznaczania.

3. Literatura.

- T. Zieliński, „Cyfrowe przetwarzania sygnałów”, WKŁ, 2005.
- R.G. Lyons, „Wprowadzenie do cyfrowego przetwarzania sygnałów”, WKŁ, 2006.

4. Spis funkcji i instrukcji przydatnych podczas realizacji ćwiczenia.

Opisane w tym punkcie funkcje nie są standardowymi wbudowanymi funkcjami MATLAB'a i zostały stworzone na potrzeby Laboratorium PTS.

O ile w trakcie realizacji ćwiczenia zajdzie potrzeba skorzystania ze standardowej funkcji (polecenia) lub instrukcji MATLAB'a, należy się z nią zapoznać wykorzystując pomoc MATLAB'a za pomocą polecenia `help` lub `doc`, np. `help sin` lub `doc sin`.

```
[t, syg]=sygnal (typ, Amp, fsyg, faza, sk_stala, wsp_wyp, fp, T, typ_wykresu)
```

Funkcja służy do generacji sygnałów sinusoidalnych, prostokątnych, trójkątnych bądź losowych.

Parametrami wyjściowymi funkcji są:

1. **t** – wektor, którego wartości reprezentują czas akwizycji kolejnych próbek sygnału,
2. **syg** – wektor wartości generowanego sygnału.

Parametrami wejściowymi funkcji są:

1. **typ** - typ sygnału jaki ma zostać wygenerowany:
 - a) **'sinus'** – generuje sygnał sinusoidalny o zadanej amplitudzie, częstotliwości, fazie oraz składowej stałej,
 - b) **'prostokat'** – generuje sygnał prostokątny o zadanej amplitudzie, częstotliwości, fazie, wypełnieniu oraz składowej stałej,
 - c) **'trojkat'** – generuje sygnał trójkątny o zadanej amplitudzie, częstotliwości, fazie, wypełnieniu oraz składowej stałej,
 - d) **'losowy'** – generuje szum biały o rozkładzie Gaussa o zadanej amplitudzie.
2. **Amp** - amplituda generowanego sygnału,
3. **fsyg** - częstotliwość generowanego sygnału,
4. **faza** - faza generowanego sygnału
5. **sk_stala** - składowa stała generowanego sygnału
6. **wsp_wyp** - współczynnik wypełnienia generowanego sygnału,
7. **fp** - częstotliwość próbkowania generowanego sygnału,
8. **T** - czas akwizycji (próbkowania) generowanego sygnału,
9. **typ_wykresu** – określa typ prezentacji graficznej:
 - a) **'dyskretny'** – generowany jest wykres dyskretny (obrazujący tylko znane wartości sygnału),
 - b) **'ciagly'** – generowany jest wykres ciągły (próbki pomiędzy znanymi wartościami sygnału są aproksymowane prostymi łączącymi dwa kolejne punkty),
 - c) **[]** - brak wykresu,

Przykład:

```
[t1, s1] = sygnal ('sinus', 5, 20, 0, 0, [], 100, 1, []);
```

Powyższa komenda wygeneruje sygnał dyskretny **s1** w funkcji wektora **t1** powstały na skutek spróbkowania sinusoidalnego sygnału ciągłego o amplitudzie równej 5 i częstotliwości 20Hz. Częstotliwość próbkowania wynosi 100Hz a czas akwizycji sygnału T=1s. Brak automatycznej generacji wykresu.

```
[f, wa, faza] = WA(typ, syg, nfft, fp, typ_wykresu)
```

Funkcja wyznacza widmo amplitudowe (jedno lub dwustronne) sygnału **syg**.

Parametrami wyjściowymi funkcji są:

1. **f** – wektor częstotliwości dla których zostały wyznaczone wartości amplitudy,
2. **wa** – wektor wartości widma amplitudowego sygnału **syg**,
3. **faza** – wektor wartości fazy,

Parametrami wejściowymi funkcji są:

1. **typ** – określa czy ma zostać wyznaczone widmo amplitudowe jedno czy dwustronne,
 - a) '**jednostronne**',
 - b) '**dwustronne**',
2. **syg** – sygnał wejściowy,
3. **nfft** – długość (w próbkach) okna danych poddanych DTF, jeżeli **nfft** jest większe od długości danych wejściowych (**syg**) to dane uzupełniane są zerami tak aby długość okna danych wynosiła **nfft**, w odwrotnej sytuacji tylko próbki od pierwszej do **nfft** są podane analizie. Jeżeli jako wartość zostanie podana pusta tablica (`[]`) to **nfft** automatycznie będzie równe długości wektora danych wejściowych (**syg**),
4. **fp** – częstotliwości próbkowania sygnału wejściowego (**syg**),
5. **typ_wykresu** – określa typ prezentacji graficznej:
 - a) '**dyskretny**' – generowany jest wykres dyskretny (obrazujący tylko znane wartości sygnału),
 - b) '**ciagly**' – generowany jest wykres ciągły (próbki pomiędzy znanymi wartościami sygnału są aproksymowane prostymi łączącymi dwa kolejne punkty),
 - c) `[]` - brak wykresu,

Przykład:

```
[f2, wa2, faza2] = WA('jednostronne', s2, 1024, 250, 'ciagly');
```

Powyższa komenda wyznaczy jednostronne widmo amplitudowe sygnału **s2** (próbkowanego częstotliwością 250Hz) o długości DTF 1024 próbek, wynik zostanie zapisany na zmiennych **f2**, **wa2** i **faza2** oraz zostanie utworzony wykres ciągły przedstawiający widmo amplitudowe sygnału **s2**.

```
[f, wgm] = WGM(syg, nfft, fp, okno, beta, typ_wykresu)
```

Funkcja wyznacza widmową gęstość mocy sygnału wejściowego (**syg**).

Parametrami wyjściowymi są:

1. **f** - wektor częstotliwości dla których zostały wyliczone wartości widmowej gęstości mocy.
2. **wgm** - wektor wartości widmowej gęstości mocy sygnału wejściowego (**syg**).

Parametrami wejściowymi są:

1. **syg** – sygnał wejściowy,
2. **nfft** – długość (w próbkach) okna danych poddanych DTF, jeżeli **nfft** jest większe od długości danych wejściowych (**syg**) to dane uzupełniane są zerami tak aby długość okna danych wynosiła **nfft**, w odwrotnej sytuacji tylko próbki od pierwszej do **nfft** są podane analizie. Jeżeli jako wartość zostanie podana pusta tablica (`[]`) to **nfft** automatycznie będzie równe długości wektora danych wejściowych (**syg**),
3. **fp** – częstotliwości próbkowania sygnału wejściowego (**syg**),
4. **okno** – rodzaj okna czasowego (funkcji granic):
 - a) **'prostokatne'** – okno prostokątne,
 - b) **'hann'** – okno Hanny,
 - c) **'hamming'** – okno Hamminga,
 - d) **'blackman'** – okno Blackmana,
 - e) **'kaiser'** – okno Kaisera,
5. **beta** – współczynnik okna Kaisera,
6. **typ_wykresu** – określa typ prezentacji graficznej:
 - a) **'liniowy'** – generowany jest liniowy wykres ciągły widmowej gęstości mocy wyrażonej w jednostkach 1/Hz,
 - b) **'logarytmiczny'** – generowany ciągły wykres widmowej gęstości mocy wyrażonej w decybelach (wykres jest znormalizowany do wartości maksymalnej),
 - c) `[]` - brak wykresu,

Przykład:

```
[f3, wgm3] = WGM(s3, 512, 1000, 'hann', [], 'logarytmiczny');
```

Powyższa komenda wyznaczy wartości widmowej gęstości mocy (**wgm3**) sygnału **s3** (próbkowanego częstotliwością 1000Hz) o długości DTF 512 próbek, wynik zostanie zapisany na zmiennych **f3** i **wgm3** oraz zostanie utworzony wykres logarytmiczny danych wyjściowych.

$p = P_WGM(wgm, fp, nfft, f1, f2)$

Funkcja wyznacza moc (**p**) zawartą w zadanym pasmie sygnału na podstawie wartości widmowej gęstości (**wgm**) mocy sygnału.

Parametrem wyjściowym jest **p** - moc sygnału w zadanym pasmie (od **f1** do **f2**),

Parametrami wejściowymi są:

1. **wgm** - wektor reprezentujący wartości widmowej gęstość mocy sygnału **s**,
2. **fp** - częstotliwość próbkowania sygnału **s**,
3. **nfft** - długość DTF, którą zastosowano do wyznaczenia **wgm** sygnału **s**,
4. **f1, f2** - częstotliwości graniczne pasma dla którego zostanie oszacowana moc,

Przykład:

```
[f3, wgm3] = WGM(s3, 512, 1000, 'hann', [], 'logarytmiczny') ;  
p3_20_50= P_WGM(wgm3, 1000, 512, 20, 50);
```

Powyższe komendy wyznaczają:

1. wartości widmowej gęstości mocy (**wgm3**) sygnału **s3** (próbkowanego częstotliwością 1000Hz) o długości DTF 512 próbek, wynik zostanie zapisany na zmiennych **f3** i **wgm3** oraz zostanie utworzony wykres logarytmiczny danych wyjściowych,
2. wartość mocy (**p3_20_50**) sygnału **s3** w paśmie od 20 do 50Hz.

spektrogram(syg,okno,dl_okna,nfft,fp)

Funkcja wyznacza spektrogram sygnału wejściowego (**syg**) i prezentuje rezultat w postaci dwuwymiarowej (czas, częstotliwość) funkcji widmowej gęstości mocy. Wartości widmowej gęstości mocy są wyrażone w decybelach (normalizacja do wartości maksymalnej).

Parametrami wejściowymi są:

1. **syg** - sygnał wejściowy,
2. **nfft** – długość (w próbkach) okna danych poddanych DTF,
3. **fp** - częstotliwość próbkowania sygnału wejściowego (**syg**),
4. **okno** – rodzaj okna czasowego (funkcji granic):
 - a) **'rect'** – okno prostokątne,
 - b) **'hann'** – okno Hanna,
 - c) **'hamming'** – okno Hamminga,
5. **dl_okna** - długość okna danych wyrażona w próbkach.

Przykład:

```
spektrogram(s4, 'hann', 256, 1024, 1000);
```

5. Przebieg ćwiczenia

Przed przystąpieniem do realizacji ćwiczenia należy poprosić prowadzącego o wskazanie folderu zawierającego dane niezbędne do realizacji ćwiczenia.

Uwaga: Pliki zawierające dane, które należy wykorzystać w ćwiczeniu zawierają następujące zmienne (x oznacza nr sygnału):

- s_x – wektor wartości sygnału s_x w chwilach t_x ,
- t_x – wektor, którego wartości reprezentują czas akwizycji kolejnych próbek sygnału s_x ,
- f_x – częstotliwość próbkowania sygnału s_x ,

Oznaczenia użyte w tekście:

(sygnał) – nazwa funkcji, która powinna zostać użyta w celu rozwiązania danego problemu,

s1 – nazwa zmiennej.

`s1a=s1(1:end/4)` – polecenie Matlabu które należy wpisać w okno komend (ang.: command window).

$s(t) = A \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t)$ - opis w notacji matematycznej.

1. Generacja sygnałów dyskretnych.

- Wygenerować sygnał sinusoidalny **s1 (sygnał)** $s1(t1) = A1 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f1 \cdot t1)$, gdzie:
 - $A1=10$ – amplituda sygnału **s1**,
 - $f1=10$ – częstotliwość sygnału **s1** w [Hz],
 - $fp1=100$ – częstotliwość próbkowania sygnału **s1** w [Hz],
 - $T1=1$ – całkowity czas próbkowania sygnału **s1** w [s].
- Na jednym rysunku, na dwóch wykresach (jeden pod drugim) wykreślić dwukrotnie sygnał **s1(t1)**:
 - jako funkcje czasu (wektor **t1**) – wykres ciągły (plot - standardowa funkcja pakietu MATLAB), górna część rysunku,
 - jako funkcje numeru próbki - wykres dyskretny (stem - standardowa funkcja pakietu MATLAB), dolna część rysunku.

Jakie są zalety i wady poszczególnych reprezentacji graficznych (wykres ciągły czy dyskretny)?

2. Dyskretna transformacja Fouriera (DTF), widmo amplitudowe, uzupełnianie zerami.

- Wyznaczyć moduł DTF dla sygnału **s1** ($DTFs1 = \text{abs}(\text{fft}(s1))$) i wyrysować **DTFs1** w formie wykresu dyskretnego (**stem** - standardowa funkcja pakietu MATLAB).
- Wyznaczyć dwustronne i jednostronne widmo amplitudowe (**WA**) sygnału **s1** przy następujących parametrach:
 - `nfft = []`,

- $fp=fp1$,
- $typ_wykresu='dyskretny'$,

Wyjaśnij różnice pomiędzy wynikami uzyskanymi w pp.a) i b).

- c) Wyznaczyć jednostronne widmo amplitudowe (**WA**) sygnału **s1** dla dwóch wartości **nfft** (w obu przypadkach $typ_wykresu='ciagly'$):
- $nfft=128$,
 - $nfft=1024$,
- d) Wyznaczyć jednostronne widmo amplitudowe (**WA**) sygnału ($s1a=s1(1:end/4);$) (**s1a** ma 4 krotnie krótszy czas akwizycji w porównaniu do **s1**) dla ($nfft=1024$, $typ_wykresu='ciagly'$).

Jaki wpływ na wynik analizy ma skrócenie okna danych, a jaki uzupełnianie zerami?

3. Funkcje granic (okna czasowe).

- a) Za pomocą narzędzia **wintool** (poprosić prowadzącego o zaprezentowanie sposobu korzystania z narzędzia) obejrzyć i zanotować wartości: szerokości listka głównego (ang.: mainlobe width), tłumienia listków bocznych (ang.: relative sidelobe attenuation) oraz współczynnika przecieku (ang.: leakage factor) dla następujących okien czasowych:
- prostokątnego (Rectangular),
 - Hanna (Hann),
 - Kaisera (Kaiser) – parametr beta powinien wynosić 10.

4. Widmowa gęstość mocy.

- a) Wyznaczyć widmową gęstość mocy sygnału **s1** (**WGM**) przyjmując następujące wartości parametrów wejściowych:
- $nfft=2048$,
 - $fp=fp1=100$,
 - $okno='prostokatne'$,
 - $beta=[]$,
 - $typ_wykresu='liniowy'$,

Uzyskany wynik przypisać na zmienne **f1** oraz **wgm1**:
 $[f1, wgm1] = WGM(...)$.

- b) Za pomocą funkcji **P_WGM** wyznaczyć moc dla całego sygnału **s1** (P_{tot}) oraz dla pasma zawierającego listek główny widma sygnału **s1** (P_{lobe}).

- c) Oblicz stosunek pomiędzy P_{lobe} i P_{tot} .

Jaki procent całej mocy sygnału **s1** znajduje się w paśmie obejmującym listek główny widma? Porównaj otrzymaną wartość ze współczynnikiem przecieku okna prostokątnego (patrz punkt 3 *wintool*).

5. Wpływ okna czasowego na wynik analizy widmowej sygnału.

- a) Wczytać plik „sygnał_nr_2.mat” do przestrzeni roboczej (ang.: workspace). Sygnał **s2** został uzyskany przez spróbkowanie sygnału ciągłego $s(t)$ opisanego następującym równaniem $s(t) = 10 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot 10 \cdot t) + 0,05 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot 25 \cdot t)$, częstotliwość próbkowania $f_{p2} = 100\text{Hz}$, czas trwania akwizycji $T_2 = 1\text{s}$.
- b) Wykreślić przebieg sygnału **s2** w funkcji **t2** (wykres dyskretny) (*stem* - standardowa funkcja pakietu MATLAB).
- c) Wyznaczyć wartości widmowej gęstości mocy (*WGM*) sygnału **s2** dla trzech okien czasowych: prostokątne ('prostokatne'), Hann'a ('hann'), Kaisera ('kaiser'). Pozostałe parametry analizy powinny być następujące:
- $nfft = 2048$,
 - $fp = fp_2 = 100$,
 - $\beta = 10$,
 - $\text{typ_wykresu} = \text{'logarytmiczny'}$.

Dla których parametrów funkcji *WGM* najlepiej uwidocznione są obydwie składowe sygnału **s2**?

6. Zadanie.

- a) Wczytać plik „sygnał_nr_3.mat” do przestrzeni roboczej (ang.: workspace). Sygnał **s3** został uzyskany przez spróbkowanie sygnału ciągłego $s(t)$ opisanego następującym równaniem $s(t) = 10 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot 100 \cdot t) + 0,1 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot 115 \cdot t)$, częstotliwość próbkowania **fp3=1000Hz**, czas trwania akwizycji **T3=0,5s**.
- b) Wyznaczyć widmową gęstość mocy (*WGM*) dla sygnału **s3**. Samodzielnie dobrać parametry wejściowe funkcji *WGM*.

7. Twierdzenie o próbkowaniu (Nyquista)

- a) Wczytać plik „sygnał_nr_4.mat” do przestrzeni roboczej (ang.: workspace). Sygnały **s4a** oraz **s4b** zostały uzyskane przez spróbkowanie (różnymi częstotliwościami próbkowania) sygnału ciągłego $s(t)$ opisanego następującym równaniem $s(t) = \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t)$ gdzie $f = 20\text{ Hz}$, częstotliwości próbkowania: **fp4a=75Hz**, **fp4b=15Hz**, czas trwania akwizycji **T4=0,5s**.
- b) Wyznaczyć jednostronne widma amplitudowe (*WA*) sygnałów **s4a** i **s4b** (w obu przypadkach: $\text{typ_wykresu} = \text{'ciagly'}$, $nfft = 1024$).

Wyjaśnij zaobserwowane różnice w widmach amplitudowych sygnałów **s4a** i **s4b**.

- c) Wczytać plik „sygnał_nr_5.mat” do przestrzeni roboczej (ang.: workspace). Sygnał **s5** został uzyskany przez spróbkowanie sygnału ciągłego będącego falą prostokątną o

- amplitudzie $A_5=1$ i częstotliwości $f_5=20\text{Hz}$, częstotliwość próbkowania $fp_5=1100\text{Hz}$, czas trwania akwizycji $T_5=1\text{s}$.
- d) Wyznaczyć jednostronne widmo amplitudowe (WA) sygnału s_5 (typ_wykresu='ciagly', nfft=[]).
- e) Na uzyskany w pkt. 7d rysunek nałóż (**hold on, hold off** - standardowa funkcja pakietu MATLAB) teoretyczne widmo amplitudowe ciągłego sygnału prostokątnej o nieskończonym czasie trwania (**stem** - standardowa funkcja pakietu MATLAB). Bipolarana, symetryczna fala prostokątna opisana jest następującym szeregiem Fouriera $x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 \cdot A}{(2 \cdot n - 1) \cdot \pi} \sin((2 \cdot n - 1) \cdot \omega_0 \cdot t)$, gdzie A to amplituda fali, a ω_0 to częstość podstawowa. Zastosuj pętlę **for** (zapoznaj się ze składnią instrukcji sterującej **for**). Dobierz wartość parametru n (wartości końcowa zmiennej sterującej pętli **for**).
- f) Powtórzyc podpunkt d i e przyjmując $nfft=2048$.

Wyjaśnij różnice pomiędzy otrzymanym widmem a teoretycznym widmem amplitudowym.

8. Spektrogram.

- a) Wczytać plik „sygnał_nr_6_i_7.mat” do przestrzeni roboczej (ang.: workspace). Sygnał s_6 (w funkcji t_6) reprezentuje wartości częstotliwości chwilowej sygnału s_7 $s_7(t) = \sin(2 \cdot \pi \cdot s_6(t) \cdot t)$, częstotliwość próbkowania sygnału s_7 wynosi $fp_7=100\text{kHz}$, czas akwizycji $T_7=1\text{s}$.
- b) Wykreślić przebieg sygnału s_6 w funkcji t_6 (**plot** - standardowa funkcja pakietu MATLAB) – oś pionową wykresu oznaczyć jako f [Hz], a poziomą jako t [s],
- c) Wyznaczyć spektrogram (**spektrogram**) sygnału s_7 dla trzech różnych wartości parametru dl_okna : 32, 256, 1024. Wartości pozostałych parametrów wejściowych funkcji **spektrogram** powinny być następujące:
- okno='hann',
 - nfft=2048,
 - fp=fp7=100e3,

Porównaj otrzymane spektrogramy z przebiegiem sygnału s_6 w funkcji t_6 i wyjaśnij różnice.

- d) Wczytać plik „sygnał_nr_8.mat” do przestrzeni roboczej (ang.: workspace). Sygnał s_8 jest sumą sygnału s_7 i szumu białego $s_8(t) = s_7(t) + szum(t)$, częstotliwość próbkowania sygnałów s_7 i s_8 wynosi $fp_8=fp_7=100\text{kHz}$, czas akwizycji $T_8=T_7=1\text{s}$. Wyznaczyć spektrogramy (**spektrogram**) sygnału s_8 analogicznie jak w poprzednim podpunkcie.

Porównaj spektrogramy otrzymane w podpunktach c i d oraz przebieg sygnału s_6 w funkcji t_6 . Wyjaśnij zaobserwowane różnice.

Sprawozdanie

Ćwiczenie nr 1 Data

L.p.	Imię i nazwisko	Grupa	Data
1			
2			
3			

Punkt ćwiczenia	Liczba punktów	Uzyskana liczba punktów	Uwagi prowadzącego
1	0,5		
2	0,5		
3	1		
4	1		
5	1		
6	2		
7	a) - b)	1	
	c) - f)	2	
8	1		