

*Laboratorium
Przetwarzania Sygnałów*

Ćwiczenie 2

„Analiza widmowa”

Opracowali:

- prof. dr hab. inż. Krzysztof Kałużyński
- dr inż. Beata Leśniak-Plewińska
- dr inż. Jakub Żmigrodzki

Zakład Inżynierii Biomedycznej,
Instytut Metrologii i Inżynierii Biomedycznej,
Wydział Mechatroniki Politechniki Warszawskiej.

Warszawa, 2017

1. Cel ćwiczenia.

W ramach ćwiczenia studenci zapoznają się z podstawowymi właściwościami i metodami opisu sygnałów deterministycznych, przekształceniem Fouriera, twierdzeniem o próbkowaniu, funkcjami granic oraz spektrogramem.

2. Wymagane wiadomości.

1. Podstawowe kryteria podziału sygnałów.
2. Podstawowe parametry sygnałów: wartość międzyszczytowa, amplituda, wartość średnia, wartość skuteczna, moc sygnału.
3. Twierdzenie o próbkowaniu.
4. Przekształcenie Fouriera i jego własności, widmo amplitudowe, widmowa gęstość mocy.
5. Uzupełnianie zerami (zero padding).
6. Przeciek widma.
7. Funkcje granic.
8. Właściwości sygnału analitycznego.
9. Spektrogram i sposoby jego wyznaczania.

3. Literatura.

- T. Zieliński, „Cyfrowe przetwarzania sygnałów”, WKŁ, 2005.
- R.G. Lyons, „Wprowadzenie do cyfrowego przetwarzania sygnałów”, WKŁ, 2006.

4. Spis funkcji i instrukcji przydatnych podczas realizacji ćwiczenia.

Opisane w tym punkcie funkcje nie są standardowymi wbudowanymi funkcjami MATLAB'a i zostały stworzone na potrzeby Laboratorium PTS.

O ile w trakcie realizacji ćwiczenia zajdzie potrzeba skorzystania ze standardowej funkcji (polecenia) lub instrukcji MATLAB'a, należy się z nią zapoznać wykorzystując pomoc MATLAB'a za pomocą polecenia `help` lub `doc`, np. `help sin` lub `doc sin`.

```
[t, syg]=sygnal (typ, Amp, fsyg, faza, sk_stala, wsp_wyp, fp, T, typ_wykresu)
```

Funkcja służy do generacji sygnałów sinusoidalnych, prostokątnych, trójkątnych bądź losowych.

Parametrami wyjściowymi funkcji są:

1. **t** – wektor, którego wartości reprezentują czas akwizycji kolejnych próbek sygnału,
2. **syg** – wektor wartości generowanego sygnału.

Parametrami wejściowymi funkcji są:

1. **typ** - typ sygnału jaki ma zostać wygenerowany:
 - a) **'sinus'** – generuje sygnał sinusoidalny o zadanej amplitudzie, częstotliwości, fazie oraz składowej stałej,
 - b) **'prostokat'** – generuje sygnał prostokątny o zadanej amplitudzie, częstotliwości, fazie, wypełnieniu oraz składowej stałej,
 - c) **'trojkat'** – generuje sygnał trójkątny o zadanej amplitudzie, częstotliwości, fazie, wypełnieniu oraz składowej stałej,
 - d) **'losowy'** – generuje szum biały o rozkładzie Gaussa o zadanej amplitudzie.
2. **Amp** - amplituda generowanego sygnału,
3. **fsyg** - częstotliwość generowanego sygnału,
4. **faza** - faza generowanego sygnału
5. **sk_stala** - składowa stała generowanego sygnału
6. **wsp_wyp** - współczynnik wypełnienia generowanego sygnału,
7. **fp** - częstotliwość próbkowania generowanego sygnału,
8. **T** - czas akwizycji (próbkowania) generowanego sygnału,
9. **typ_wykresu** – określa typ prezentacji graficznej:
 - a) **'dyskretny'** – generowany jest wykres dyskretny (obrazujący tylko znane wartości sygnału),
 - b) **'ciagly'** – generowany jest wykres ciągły (próbki pomiędzy znanymi wartościami sygnału są aproksymowane prostymi łączącymi dwa kolejne punkty),
 - c) **[]** - brak wykresu,

Przykład:

```
[t1, s1] = sygnal ('sinus', 5, 20, 0, 0, [], 100, 1, []);
```

Powyższa komenda wygeneruje sygnał dyskretny **s1** w funkcji wektora **t1** powstały na skutek spróbkowania sinusoidalnego sygnału ciągłego o amplitudzie równej 5 i częstotliwości 20_Hz. Częstotliwość próbkowania wynosi 100_Hz a czas akwizycji sygnału T=1_s. Brak automatycznej generacji wykresu.

```
[f, wa, faza] = WA(typ, syg, nfft, fp, typ_wykresu)
```

Funkcja wyznacza widmo amplitudowe (jedno lub dwustronne) sygnału **syg**.

Parametrami wyjściowymi funkcji są:

1. **f** – wektor częstotliwości dla których zostały wyznaczone wartości amplitudy,
2. **wa** – wektor wartości widma amplitudowego sygnału **syg**,
3. **faza** – wektor wartości fazy,

Parametrami wejściowymi funkcji są:

1. **typ** – określa czy ma zostać wyznaczone widmo amplitudowe jedno czy dwustronne,
 - a) '**jednostronne**',
 - b) '**dwustronne**',
2. **syg** – sygnał wejściowy,
3. **nfft** – długość (w próbkach) okna danych poddanych DTF, jeżeli **nfft** jest większe od długości danych wejściowych (**syg**) to dane uzupełniane są zerami tak aby długość okna danych wynosiła **nfft**, w odwrotnej sytuacji tylko próbki od pierwszej do **nfft** są podane analizie. Jeżeli jako wartość zostanie podana pusta tablica (`[]`) to **nfft** automatycznie będzie równe długości wektora danych wejściowych (**syg**),
4. **fp** – częstotliwości próbkowania sygnału wejściowego (**syg**),
5. **typ_wykresu** – określa typ prezentacji graficznej:
 - a) '**dyskretny**' – generowany jest wykres dyskretny (obrazujący tylko znane wartości sygnału),
 - b) '**ciagly**' – generowany jest wykres ciągły (próbki pomiędzy znanymi wartościami sygnału są aproksymowane prostymi łączącymi dwa kolejne punkty),
 - c) `[]` - brak wykresu,

Przykład:

```
[f2, wa2, faza2] = WA('jednostronne', s2, 1024, 250, 'ciagly');
```

Powyższa komenda wyznaczy jednostronne widmo amplitudowe sygnału **s2** (próbkowanego częstotliwością 250_Hz) o długości DTF 1024 próbek, wynik zostanie zapisany na zmiennych **f2**, **wa2** i **faza2** oraz zostanie utworzony wykres ciągły przedstawiający widmo amplitudowe sygnału **s2**.

```
[f, wgm] = WGM(syg, nfft, fp, okno, beta, typ_wykresu)
```

Funkcja wyznacza widmową gęstość mocy sygnału wejściowego (**syg**).

Parametrami wyjściowymi są:

1. **f** - wektor częstotliwości dla których zostały wyliczone wartości widmowej gęstości mocy.
2. **wgm** - wektor wartości widmowej gęstości mocy sygnału wejściowego (**syg**).

Parametrami wejściowymi są:

1. **syg** – sygnał wejściowy,
2. **nfft** – długość (w próbkach) okna danych poddanych DTF, jeżeli **nfft** jest większe od długości danych wejściowych (**syg**) to dane uzupełniane są zerami tak aby długość okna danych wynosiła **nfft**, w odwrotnej sytuacji tylko próbki od pierwszej do **nfft** są podane analizie. Jeżeli jako wartość zostanie podana pusta tablica (`[]`) to **nfft** automatycznie będzie równe długości wektora danych wejściowych (**syg**),
3. **fp** – częstotliwości próbkowania sygnału wejściowego (**syg**),
4. **okno** – rodzaj okna czasowego (funkcji granic):
 - a) **'prostokatne'** – okno prostokątne,
 - b) **'hann'** – okno Hanny,
 - c) **'hamming'** – okno Hamminga,
 - d) **'blackman'** – okno Blackmana,
 - e) **'kaiser'** – okno Kaisera,
5. **beta** – współczynnik okna Kaisera,
6. **typ_wykresu** – określa typ prezentacji graficznej:
 - a) **'liniowy'** – generowany jest liniowy wykres ciągły widmowej gęstości mocy wyrażonej w jednostkach 1/Hz,
 - b) **'logarytmiczny'** – generowany ciągły wykres widmowej gęstości mocy wyrażonej w decybelach (wykres jest znormalizowany do wartości maksymalnej),
 - c) `[]` - brak wykresu,

Przykład:

```
[f3, wgm3] = WGM(s3, 512, 1000, 'hann', [], 'logarytmiczny');
```

Powyższa komenda wyznaczy wartości widmowej gęstości mocy (**wgm3**) sygnału **s3** (próbkowanego częstotliwością 1000_Hz) o długości DTF 512 próbek, wynik zostanie zapisany na zmiennych **f3** i **wgm3** oraz zostanie utworzony wykres logarytmiczny danych wyjściowych.

$p = P_WGM(wgm, fp, nfft, f1, f2)$

Funkcja wyznacza moc (**p**) zawartą w zadanym pasmie sygnału na podstawie wartości widmowej gęstości (**wgm**) mocy sygnału.

Parametrem wyjściowym jest **p** - moc sygnału w zadanym pasmie (od **f1** do **f2**),

Parametrami wejściowymi są:

1. **wgm** - wektor reprezentujący wartości widmowej gęstość mocy sygnału **s**,
2. **fp** - częstotliwość próbkowania sygnału **s**,
3. **nfft** - długość DTF, którą zastosowano do wyznaczenia **wgm** sygnału **s**,
4. **f1, f2** - częstotliwości graniczne pasma dla którego zostanie oszacowana moc,

Przykład:

```
[f3, wgm3] = WGM(s3, 512, 1000, 'hann', [], 'logarytmiczny') ;  
p3_20_50= P_WGM(wgm3, 1000, 512, 20, 50);
```

Powyższe komendy wyznaczają:

1. wartości widmowej gęstości mocy (**wgm3**) sygnału **s3** (próbkowanego częstotliwością 1000_Hz) o długości DTF 512 próbek, wynik zostanie zapisany na zmiennych **f3** i **wgm3** oraz zostanie utworzony wykres logarytmiczny danych wyjściowych,
2. wartość mocy (**p3_20_50**) sygnału **s3** w paśmie od 20 do 50_Hz.

spektrogram(syg,okno,dl_okna,nfft,fp)

Funkcja wyznacza spektrogram sygnału wejściowego (**syg**) i prezentuje rezultat w postaci dwuwymiarowej (czas, częstotliwość) funkcji widmowej gęstości mocy. Wartości widmowej gęstości mocy są wyrażone w decybelach (normalizacja do wartości maksymalnej).

Parametrami wejściowymi są:

1. **syg** - sygnał wejściowy,
2. **nfft** – długość (w próbkach) okna danych poddanych DTF,
3. **fp** - częstotliwość próbkowania sygnału wejściowego (**syg**),
4. **okno** – rodzaj okna czasowego (funkcji granic):
 - a) **'rect'** – okno prostokątne,
 - b) **'hann'** – okno Hanna,
 - c) **'hamming'** – okno Hamminga,
5. **dl_okna** - długość okna danych wyrażona w próbkach.

Przykład:

```
spektrogram(s4, 'hann', 256, 1024, 1000);
```

5. Przebieg ćwiczenia

Przed przystąpieniem do realizacji ćwiczenia należy poprosić prowadzącego o wskazanie folderu zawierającego dane niezbędne do realizacji ćwiczenia.

Uwaga: Pliki zawierające dane, które należy wykorzystać w ćwiczeniu zawierają następujące zmienne (x oznacza nr sygnału):

- s_x – wektor wartości sygnału s_x w chwilach t_x ,
- t_x – wektor, którego wartości reprezentują czas akwizycji kolejnych próbek sygnału s_x ,
- f_x – częstotliwość próbkowania sygnału s_x ,

Oznaczenia użyte w tekście:

(sygnał) – nazwa funkcji, która powinna zostać użyta w celu rozwiązania danego problemu,

s1 – nazwa zmiennej.

`s1a=s1(1:end/4)` – polecenie MATLAB'a, które należy wpisać w *Okno Poleceń* (ang.: *Command Window*).

$s(t) = A \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t)$ - opis w notacji matematycznej.

1. Dyskretna transformacja Fouriera (DTF), widmo amplitudowe, uzupełnianie zerami.

- Wygenerować sygnał sinusoidalny **s1** $s1(tl) = A1 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot fl \cdot tl)$, gdzie:
 - $A1=10$ – amplituda sygnału **s1**,
 - $fl=10$ – częstotliwość sygnału **s1** w [Hz],
 - $fp1=100$ – częstotliwość próbkowania sygnału **s1** w [Hz],
 - $T1=1$ – całkowity czas próbkowania (czas trwania akwizycji) sygnału **s1** w [s].
- Wyznaczyć moduł DTF dla sygnału **s1** ($DTFs1 = \text{abs}(\text{fft}(s1))$) i wyrysować **DTFs1** w formie wykresu dyskretnego (**stem** - standardowa funkcja pakietu MATLAB).
- Wyznaczyć dwustronne i jednostronne widmo amplitudowe (**WA**) sygnału **s1** przyjmując następujące wartości parametrów wejściowych:
 - `nfft = []`,
 - `fp=fp1`,
 - `typ_wykresu='dyskretny'`,

Czy wyniki uzyskane w pp.b) i c) są ze sobą sprzeczne?

- Wyznaczyć jednostronne widmo amplitudowe (**WA**) sygnału **s1** dla dwóch wartości `nfft` (w obu przypadkach `typ_wykresu='ciagly'`):
 - `nfft=128`,

- $nfft=1024$,
- e) Utworzyć sygnał **s1a** jako fragment sygnału **s1** w zakresie od $n1$ do $n2$, gdzie $n1$ odpowiada chwili $0s$, a $n2$ – chwili $1/4 \cdot T1$; $T1$ - całkowity czas próbkowania sygnału **s1** (**s1a** ma 4-ro krotnie krótszy czas akwizycji w porównaniu do **s1**) ($s1a=s1(1:end/4);$)
- f) Wyznaczyć jednostronne widmo amplitudowe (**WA**) sygnału **s1** dla $nfft=1024$ (typ_wykresu='ciagly').

Jaka jest długość wektorów **s1** i **s1a** (w próbkach)? Jakie są wartości parametrów $nfft$ w pp. d i e w porównaniu z długością wektorów **s1** i **s1a**? Co jest wynikiem zastosowania $nfft = 128$ dla sygnału **s1** i $nfft = 1024$ dla sygnału **s1a**? Jaki wpływ na wynik analizy widmowej ma skrócenie okna danych, a jaki jego uzupełnianie zerami?

2. Funkcje granic (okna czasowe).

Za pomocą narzędzia *windowDesigner* (poprosić prowadzącego o zaprezentowanie sposobu korzystania z narzędzia) obejrzyć i zanotować w odpowiednich rubrykach *Sprawozdania* wartości: szerokości listka głównego (SLG) (ang.: mainlobe width), tłumienia listków bocznych (TLB) (ang.: relative sidelobe attenuation) oraz współczynnika przecieku (WP) (ang.: leakage factor) dla następujących okien czasowych:

- prostokątnego (ang. Rectangular),
- Hanna (ang. Hann),
- Kaisera (ang. Kaiser) (przyjąć $\beta=10$).

3. Widmowa gęstość mocy.

- a) Wyznaczyć widmową gęstość mocy sygnału **s1** (**WGM**) przyjmując następujące wartości parametrów wejściowych:
 - $nfft=2048$,
 - $fp=fp1=100$,
 - okno='prostokatne',
 - $\beta=[]$,
 - typ_wykresu='liniowy',

Uzyskany wynik przypisać do zmiennych: wf1 oraz wgm1
($[f1, wgm1] = WGM(\dots)$).

- b) Za pomocą funkcji **P_WGM** wyznaczyć moc dla całego sygnału **s1** (P_{tot}) oraz dla pasma zawierającego listek główny widma sygnału **s1** (P_{lobe}). Wyniki zanotować w odpowiednich rubrykach *Sprawozdania*.
- c) Obliczyć stosunek pomiędzy P_{lobe} i P_{tot} . Wynik zanotować w odpowiedniej rubryce *Sprawozdania*.
- d) Zgodnie z zależnością podaną p. 4 instrukcji do Ćwiczenia 1 wyznaczyć wartość mocy średniej sygnału **s1** dla przedziału odpowiadającego całkowitemu czasowi próbkowania $T1$

$$P_n = \frac{1}{n_2 - n_1 + 1} \sum_{n=n_1}^{n_2} x^2(n) .$$

Wynik zanotować w odpowiedniej rubryce *Sprawozdania*.

Jaki procent mocy całego sygnału **s1** znajduje się w paśmie obejmującym listek główny widma? Porównaj otrzymaną wartość ze współczynnikiem przecieku okna prostokątnego (patrz punkt 2 *windowDesigner*). Porównaj wartości mocy uzyskane w pp. b) i d).

4. Wpływ okna czasowego na wynik analizy widmowej sygnału.

- Wczytać plik „sygnał_nr_2.mat” do przestrzeni roboczej (ang.: workspace). Sygnał **s2** został uzyskany przez spróbkowanie sygnału ciągłego $s(t)$ opisanego następującym równaniem $s(t) = 10 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot 10 \cdot t) + 0.05 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot 25 \cdot t)$, częstotliwość próbkowania $fp2 = 100$ Hz, czas trwania akwizycji $T2 = 1$ s.
- Wyrysować przebieg sygnału **s2** w funkcji **t2** (wykres dyskretny) (*stem* - standardowa funkcja pakietu MATLAB).
- Wyznaczyć widmową gęstość mocy (*WGM*) sygnału **s2** dla trzech okien czasowych: prostokątne ('prostokatne'), Hann'a ('hann'), Kaisera ('kaiser'). przyjmując następujące wartości pozostałych parametrów wejściowych:
 - $nfft = 2048$,
 - $fp = fp2 = 100$,
 - $beta = 10$,
 - $typ_wykresu = 'logarytmiczny'$.

Dla którego okna czasowego obydwie składowe sygnału **s2** są najlepiej uwidocznione na wykresie gęstości mocy?

5. Zadanie.

- Wczytać plik „sygnał_nr_3.mat” do przestrzeni roboczej (ang.: workspace). Sygnał **s3** został uzyskany przez spróbkowanie sygnału ciągłego $s(t)$ opisanego następującym równaniem $s(t) = 10 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot 100 \cdot t) + 0.1 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot 115 \cdot t)$, częstotliwość próbkowania $fp3 = 1000$ Hz, czas trwania akwizycji $T3 = 0.5$ s.
- Wyznaczyć widmową gęstość mocy (*WGM*) oraz jej wykres dla sygnału **s3**. Samodzielnie dobrać parametry wejściowe funkcji *WGM* tak, aby na jej wykresie widoczne były obie składowe sygnału **s3**.

6. Twierdzenie o próbkowaniu (Nyquista)

- Wczytać plik „sygnał_nr_4.mat” do przestrzeni roboczej (ang.: workspace). Sygnały **s4a** oraz **s4b** zostały uzyskane przez spróbkowanie (z różnymi częstotliwościami próbkowania) sygnału ciągłego $s(t)$ opisanego następującym równaniem $s(t) = \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t)$ gdzie $f = 20$ Hz, częstotliwości próbkowania: $fp4a = 75$ Hz, $fp4b = 15$ Hz, czas trwania akwizycji $T4 = 0.5$ s.
- Wyznaczyć jednostronne widma amplitudowe (*WA*) sygnałów **s4a** i **s4b** (w obu przypadkach przyjąć $typ_wykresu = 'ciagly'$, $nfft = 1024$).

Wyjaśnij zaobserwowane różnice w widmach amplitudowych sygnałów **s4a** i **s4b**.

c)

7. Spektrogram.

- a) Wczytać plik „sygnał_nr_6_i_7.mat” do przestrzeni roboczej (ang.: workspace). Sygnał **s6** (w funkcji **t6**) reprezentuje wartości częstotliwości chwilowej sygnału **s7** $s7(t) = \sin(2 \cdot \pi \cdot s6(t) \cdot t)$, częstotliwość próbkowania sygnału **s7** wynosi **fp7=100_kHz**, czas trwania akwizycji **T7=1_s**.
- b) Wykreślić przebieg sygnału **s6** w funkcji **t6** (*plot* - standardowa funkcja pakietu MATLAB) – oś pionową wykresu oznaczyć jako f [Hz], a poziomą jako t [s],
- c) Wyznaczyć spektrogram (*spektrogram*) sygnału **s7** dla trzech różnych wartości parametru dl_okna: 32, 256, 1024. Przyjmij następujące wartości pozostałych parametrów wejściowych funkcji *spektrogram*:
 - okno='hann',
 - nfft=2048,
 - fp=fp7=100e3,

Porównaj otrzymane spektrogramy z przebiegiem sygnału **s6** w funkcji **t6** i wyjaśnij związek pomiędzy przebiegiem sygnału **s6**, przebiegiem częstotliwości o maksymalnej amplitudzie oraz długością okna danych.

- d) Wczytać plik „sygnał_nr_8.mat” do przestrzeni roboczej (ang.: workspace). Sygnał **s8** jest sumą sygnału **s7** i szumu białego $s8(t) = s7(t) + szum(t)$, częstotliwość próbkowania sygnałów **s7** i **s8** wynosi **fp8=fp7=100_kHz**, czas trwania akwizycji **T8=T7=1_s**.
- e) Wykreślić przebieg sygnału **s8** w funkcji **t6** (*plot* - standardowa funkcja pakietu MATLAB) – oś pionową wykresu oznaczyć jako f [Hz], a poziomą jako t [s],
- f) Wyznaczyć spektrogramy (*spektrogram*) sygnału **s8** analogicznie jak w poprzednim podpunkcie (zastosuj takie same wartości parametrów wejściowych).

Porównaj spektrogramy otrzymane w pp. c i d oraz przebieg sygnału **s6** w funkcji **t6**. Wyjaśnij związek pomiędzy przebiegiem sygnału **s6**, przebiegiem częstotliwości o maksymalnej amplitudzie oraz długością okna danych.

Sprawozdanie

Ćwiczenie nr 2 „Analiza widmowa”

L.p.	Imię i nazwisko			Grupa	Data	
1						
2						
3						
Punkt ćwiczenia	Wyniki			Liczba punktów	Uzyskana liczba punktów	Uwagi prowadzącego
1	X			1		
2	parametr	Okno czasowe			2	
		prostokątne	Hanna	Keisera		
	SLG					
	TLB					
	WP					
3	b)	P_{tot}		2		
		P_{lob}				
		P_{lob}/P_{tot}				
	c)	P_n				
4	X			1		
5	X			1		
6	X			1		
7	X			2		