

Laboratorium Przetwarzania Sygnałów

Ćwiczenie 5

„Transformacja falkowa”

Opracował:

- prof. nzw. dr hab. inż. Krzysztof Kałużyński

Zakład Inżynierii Biomedycznej

Instytut Metrologii i Inżynierii Biomedycznej

Wydział Mechatroniki Politechniki Warszawskiej

Warszawa, 2009



1. Cel ćwiczenia

W ramach ćwiczenia studenci zapoznają się z podstawowymi właściwościami falek i zastosowaniami transformacji falkowej w analizie sygnałów i obrazów.

2. Wymagane wiadomości

1. Pojęcie falki, szeregu falkowego, diadycznego (oktawowego) szeregu falkowego.
2. Ciągła i dyskretna transformacja falkowa.
3. Różnice między WT i TF.
4. Lokalizacja na osi czasu i skali (częstotliwości).

3. Literatura

1. Zieliński T.P. Cyfrowe przetwarzanie sygnałów, WKiŁ 2005 (ew. Od teorii do cyfrowego przetwarzania sygnałów, Wyd. AGH, 2002).
2. Białasiewicz J. Falki i aproksymacje, WNT 2000.
3. Materiały do wykładów PTS.

4. Spis funkcji i instrukcji przydatnych podczas realizacji ćwiczenia.

Opisane w tym punkcie funkcje nie są standardowymi wbudowanymi funkcjami MATLAB'a i zostały stworzone na potrzeby Laboratorium PTS.

O ile w trakcie realizacji ćwiczenia zajdzie potrzeba skorzystania ze standardowej funkcji (polecenia) lub instrukcji MATLAB'a, należy się z nią zapoznać wykorzystując pomoc MATLAB'a za pomocą polecenia `help` lub `doc`, np. `help sin` lub `doc sin`.



`wavelet_scales(ord, typ);`

Funkcja generuje diadyczny szereg rzeczywistych falek: Shannona, mexican hat i Haara dla współczynników skali od 0 do **ord-1** oraz wykreśla ich przebiegi czasowe, widmową gęstość mocy oraz moc całkowitą.

Poszczególne falki macierzyste opisane są następującymi zależnościami:

$$\text{mexican hat} \quad \psi(t) = \frac{2}{\sqrt{(3 \cdot \sigma) \cdot \pi^{0.25}}} \cdot \left(1 - \frac{t^2}{\sigma^2}\right) \cdot e^{-\frac{t^2}{2 \cdot \sigma^2}}$$

$$\text{Haara} \quad \psi(t) = \begin{cases} 1 & \text{dla } 0 \leq t < 0.5 \\ -1 & \text{dla } 0.5 \leq t < 1 \\ 0 & \text{w pozostałych przypadkach} \end{cases}$$

$$\text{Shannona} \quad \psi(t) = 2 \cdot \text{sinc}(2 \cdot t - 1) - \text{sinc}(t - 0.5)$$

gdzie: $\sigma = 1$, $\text{sinc}(x) = \sin(\pi \cdot x) / (\pi \cdot x)$, t – czas.

Diadyczny szereg falek opisuje wzór:

$$\psi_j(t) = \frac{1}{\sqrt{(2^j)}} \cdot \psi\left(\frac{t}{2^j}\right)$$

gdzie j – współczynnik skali, $j=0, 1, 2, 3 \dots$

Parametrami wejściowymi funkcji są:

1. **ord** – liczba falek w szeregu,
2. **typ** – rodzaj falki macierzystej (może przyjmować jedną z następujących wartości: '**mexican hat**', '**haar**', '**shannon**')

Uwaga:

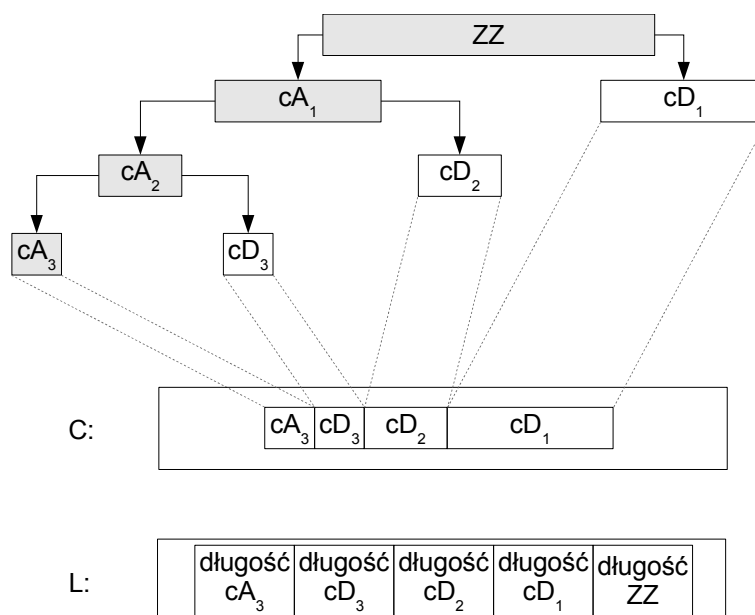
- przebieg czasowy jest wykreślony w funkcji czasu znormalizowanego do wartości maksymalnej - t/t_{\max} gdzie t_{\max} to maksymalna wartość parametru t ,
- przebieg widmowej gęstości mocy jest wykreślony w funkcji częstotliwości znormalizowanej do częstotliwości próbkowania - f/f_p gdzie f_p to częstotliwość próbkowania.

`[xx,yy,ZZ,x,C,L]=denoise(wav,ord);`

Funkcja służy do dekompozycji i rekonstrukcji falkowej sygnału generowanego w ramach tej funkcji, przy czym demonstrowane są możliwości analizy falkowej w zakresie eliminacji szumu z sygnału. Generowany sygnał składa się z dwóch paczek gaussowskich (fala cosinus o jednostkowej amplitudzie, zmodulowana obwiednią gaussowską) o częstotliwościach odniesionych do częstotliwości próbkowania równych odpowiednio około $0.01/f_p$ i $0.02/f_p$ (f_p – częstotliwość próbkowania sygnału), do których dodany jest szum biały o wartości skutecznej 0.25, wszystkie o długości 10000 próbek.

Parametrami wyjściowymi funkcji są:

1. **xx** – pierwsza paczka gaussowska,
2. **yy** – druga paczka gaussowska (suma **xx** i **yy** tworzy sygnał oryginalny),
3. **ZZ** – sygnał wyjściowy (do dekompozycji/analizy),
4. **x** – macierz o wymiarach **ord***10000, zawierająca produkty rekonstrukcji – wektory aproksymacji A i detali D analizowanego sygnału, w kolejności następującej: aproksymacja A'ord', reprezentacje szczegółowe na kolejnych poziomach skali od najwyższego D'ord' poczynając na D1 kończąc, np. dla **ord**=3 mamy $x(1,:)=A3$, $x(2,:)=D3$, $x(3,:)=D2$, $x(4,:)=D1$,
5. **C** – wektor zawierający współczynniki aproksymacji i reprezentacji szczegółowych na kolejnych poziomach skali,
6. **L** – wektor określający długość poszczególnych części wektora **C** oraz sygnału, t.j. liczbę współczynników aproksymacji i reprezentacji szczegółowych na kolejnych poziomach skali, wobec czego długość wektora **L** wynosi **ord**+2.



Parametrami wejściowymi funkcji są:

1. **wav** – nazwa falki; np. **'sym4'** – falka symlet4, **'db4'** – falka db4,
2. **ord** – maksymalny poziom skali (dekompozycji), w ćwiczeniu przyjąć **ord**=6.

```
[f,wa] = WA(typ, syg, nfft, fp, typ_wykresu)
```

Funkcja wyznacza widmo amplitudowe (jedno lub dwustronne) sygnału **syg**.

Parametrami wyjściowymi funkcji są:

1. **f** – wektor częstotliwości, dla których zostały wyznaczone wartości amplitudy,
2. **wa** – wektor wartości widma amplitudowego sygnału **syg**.

Parametrami wejściowymi funkcji są:

1. **typ** – określa czy ma zostać wyznaczone widmo amplitudowe jedno, czy dwustronne,
 1. **'jednostronne'**,
 2. **'dwustronne'**,
2. **syg** – sygnał wejściowy,
3. **nfft** – długość (w próbkach) okna danych poddanych DTF, jeżeli **nfft** jest większe od długości danych wejściowych (**syg**) to dane uzupełniane są zerami do **nfft**, w odwrotnej sytuacji tylko próbki od pierwszej do **nfft** są podane analizie. Jeżeli jako wartość zostanie podana pusta tablica (`[]`) to **nfft** będzie równe długości wektora **syg**,
4. **fp** – częstotliwości próbkowania sygnału wejściowego (**syg**),
5. **typ_wykresu** – określa typ prezentacji graficznej:
 1. **'dyskretny'** – generowany jest wykres dyskretny (obrazujący tylko znane wartości sygnału),
 2. **'ciagly'** – generowany jest wykres ciągły (próbki pomiędzy znanymi wartościami sygnału są aproksymowane prostymi łączącymi dwa kolejne punkty),
 3. `[]` - brak wykresu.

$rrmse = rlmnsqerr(x, y)$

Funkcja wyznacza względną różnicę średniokwadratową RRMSE między dwoma sygnałami wg zależności:

$$RRMSE = \frac{RMSE}{\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n [y(i)]^2}{n}}} \quad RMSE = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n [x(i) - y(i)]^2}{n}}$$

gdzie x i y oznaczają porównywane sygnały, n – liczba próbek sygnałów, RMSE – błąd średniokwadratowy, RRMSE – względny błąd średniokwadratowy odniesiony do wartości skutecznej.

Parametrami wyjściowymi funkcji są:

1. **rrmse** - względny błąd średniokwadratowy odniesiony do wartości skutecznej.

Parametrami wyjściowymi funkcji są:

1. x - wektor reprezentujący jeden z porównywanych sygnałów,
2. y - wektor reprezentujący jeden z porównywanych sygnałów.

5. Przebieg ćwiczenia

Przed przystąpieniem do realizacji ćwiczenia należy poprosić prowadzącego o wskazanie folderu zawierającego dane niezbędne do realizacji ćwiczenia.

Oznaczenia użyte w tekście:

(sygnał) – nazwa funkcji, która powinna zostać użyta w celu rozwiązania danego problemu,

s1 – nazwa zmiennej,

`s1a=s1(1:end/4)` – polecenie Matlab'a, które należy wpisać w okno komend (ang.: command window),

$s(t) = A \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t)$ - opis w notacji matematycznej.

1. Właściwości diadycznego szeregu falkowego.

- Wywołać funkcję `wavelet_scales(ord, typ)` dla **ord** = 1, 3 i 5 oraz **typ** = 'shannon'. Przeanalizować uzyskane wyniki.
- Na podstawie danych uzyskanych dla **ord** = 5 oszacować unormowaną częstotliwość centralną (f_0/f_p), unormowaną szerokość widma ($\Delta f/f_p$), widmową gęstość mocy dla częstotliwości centralnej ($WGM(f_0/f_p)$) oraz moc całkowitą (**P**) dla poszczególnych skal falki Shannona (wypełnić poniższa tabelę).

Wsp. skali – j	f_0/f_p	$\Delta f/f_p$	WGM(f_0)	P
0				
1				
2				
3				
4				

- Wywołać funkcję `wavelet_scales(ord, typ)` dla **ord** = 5 oraz **typ** = 'mexican hat'. Przeanalizować uzyskane wyniki.
- Na podstawie danych uzyskanych dla **ord** = 5 oszacować unormowaną częstotliwość centralną (f_0/f_p), unormowaną szerokość widma ($\Delta f/f_p$), widmową gęstość mocy dla częstotliwości centralnej ($WGM(f_0/f_p)$) oraz moc całkowitą (**P**) dla poszczególnych skal falki Mexican hat (wypełnić poniższa tabelę).

Wsp. skali – j	f_0/f_p	$\Delta f/f_p$	WGM(f_0)	P
0				
1				
2				
3				
4				

Omów relacje pomiędzy wartością współczynnika skali a parametrami (tabela wyników) odpowiadających im przeskalowanych diadycznie falek Shanona i mexican hat.

Wyjaśnić sposób wykorzystania falek do analizy sygnału w podpasmach, traktując falki jak odpowiedzi impulsowe filtrów.

2. Dekompozycja i odtworzenie sygnału oraz eliminacja szumów obecnych w sygnale z wykorzystaniem dyskretnej transformacji falkowej DWT.

- a) Wywołać funkcję `[xx, yy, ZZ, x, C, L]=denoise('sym4', 6)`.
- b) Wykreślić w jednym oknie graficznym (jeden wykres pod drugim) produkty rekonstrukcji z pkt. 2.a) (elementy macierzy **x** – aproksymację i reprezentacje szczegółowe) posługując się poleceniem *subplot* (*subplot* – standardowa funkcja pakietu MATLAB)
- c) Odtworzyć sygnał na podstawie
 - Aproksymacji **A6** oraz reprezentacji szczegółowych **D6** i **D5**
odt1=A6 + D6 + D5
 - Aproksymacji **A6** oraz reprezentacji szczegółowych **D6**, **D5** i **D4**
odt2=A6 + D6 + D5 + D4
- d) Wkreślić w jednym oknie graficznym (jeden wykres pod drugim) kolejno: sygnał oryginalny (**xx + yy**), sygnał **ZZ**, sygnały **odt1** i **odt2**, różnice sygnałów odtworzonych i sygnału oryginalnego (**xx + yy - odt1**) oraz (**xx + yy - odt2**) (*subplot* – standardowa funkcja pakietu MATLAB'a).
- e) Poddać uzyskane po rekonstrukcji z pkt. 2.a) przebiegi (elementy macierzy **x**) analizie widmowej stosując polecenie *WA* z parametrami:
`typ = 'jednostronne',`
`syg = x(i,:),`
`nfft = 10000,`
`fp = 1,`
`typ_wykresu = [].`
- f) Wykreślić w jednym oknie graficznym (jeden wykres pod drugim) otrzymane w p.2.e) jednostronne widma amplitudowe (*subplot* – standardowa funkcja pakietu MATLAB).
- g) Wyznaczyć względne różnice (błędy) średniokwadratowe między sygnałem oryginalnym (**xx+yy**) a sygnałami **odt1** i **odt2** oraz między sygnałem oryginalnym (**xx+yy**) i sygnałem **ZZ**, posługując się funkcją *rlmnsqerr* z odpowiednimi parametrami wejściowymi.

Sygnaly	Różnica średniokwadratowa
(xx+yy) i odt1	
(xx+yy) i odt2	
(xx+yy) i ZZ	

- h) Na podstawie wartości elementów wektora **L** oszacować możliwości kompresji sygnału przy odtwarzaniu go ze współczynników aproksymacji i detali dla poziomów skali 6, 5 i 4 (jako stosunek liczby współczynników uzyskiwanych dla tych poziomów i liczby próbek sygnału wejściowego).

Poziom skali	Możliwość kompresji
6	
5	
4	

Porównać widma poszczególnych produktów rekonstrukcji.
Dlaczego sygnał odtworzony z wybranych produktów rekonstrukcji zawiera szum?

Sprawozdanie

Ćwiczenie 5 „Transformacja falkowa”

L.p.	Imię i nazwisko	Grupa	Data
1			
2			
3			

Punkt ćwiczenia	Liczba punktów	Uzyskana liczba punktów	Uwagi prowadzącego
1	5		
2	5		

